This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

— Sammlung —

der

wichtigsten

Formeln, Sätze & Regeln

der

Differential- & Integralrechnung,

der

Theorie d. gewöhnl. Differentialgleichun

& der

Anwendungen d. höhern Mathemati

&c

Durchgesehen

von

Herrn Prof. Dr. Frobenius.

Zusammengestellt von J. Egli, II Md. [illegible]

Verein der Polytechniker, Z[illegible]

-1881-

1

also $a = -\frac{b_1}{3b_3}$ & $b = -\frac{b_0}{2b_3}$

Durch Einführung von

$$t = u + v \qquad \text{wo}$$

$$vu = a \qquad \text{also} \qquad v = \frac{a}{u}$$

erhält man

$$u^3 + v^3 - 2b = 0 \qquad \text{oder}$$

$$u^6 - 2bu^3 + a^3 = 0 \qquad \text{also}$$

$$u = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} \quad \& \quad v = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$$

3 also $$t = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - a^3}}$$

$$\underline{x = c + t}$$

<u>Sätze und Formeln über Funktionen.</u>

<u>1.</u> Zwei Funktionen sind einander gleich, wenn sie für dieselben Werthe der Variablen dieselben Werthe haben.

<u>2.</u> Die Summe (: oder Differenz :) mehrerer ganzer Funktionen ist wieder eine ganze Funktion.

<u>3.</u> Das Produkt mehrerer ganzer Funktionen vom Grade $r, s, t \ldots$ ist wieder eine ganze Funktion vom Grade $r+s+t+\ldots$.

<u>4.</u> Eine ganze Funktion (: vom Grade r :) ist durch eine ganze Funktion (: vom Grade s :) theilbar, wenn der Quotient wieder eine ganze Funktion (: vom Grade $(r-s)$:) ist.

<u>5.</u> Die n^{te} Potenz einer ganzen Funktion s^{ten} Grades ist eine ganze Funktion vom Gr. $n.s$.

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = a_1 + a_2(x+x_1) + a_3(x^2+xx_1+x_1^2) + a_4(x^3+x^2x_1+xx_1^2+x_1^3) + \cdots + a_n(x^{n-1}+x^{n-2}x_1+\cdots+xx_1^{n-2}+x_1^{n-1})$$

11. Anwendung dieses Satzes:
ist $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$
so ist auch

$$f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$$

wo $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind.

12. Eine Gleichung n^{ten} Grades hat nicht mehr als n Wurzeln; unter diesen können jedoch mehrere einander gleich sein, so dass die Funktion gebrochen werden kann:

$$f(x) = (x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \cdot (x-c)^\gamma \cdot \ldots$$

13. Jede Gleichung n^{ten} Grades kann also in ein Produkt von n Linear-Faktoren zerlegt werden.

14. Wenn eine Funktion n^{ten} Grades für mehr als n verschiedene Werthe von x verschwindet, so muss sie für alle Werthe von x verschwinden, und es müssen alle ihre Coefficienten gleich Null sein.

15. Wenn eine ganze Funktion von x für unzählig viele Werthe dieser Variablen verschwindet, so muss sie für alle verschwindenden und alle ihre Coefficienten müssen gleich Null sein.

16. Wenn zwei ganze Funktionen n^{ten} Grades für mehr als n verschiedene Werthe

22. Nimmt eine Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ an, so findet man den Werth des Bruches für $x=a$, indem man Zähler und Nenner so oft, als es geht, mit dem gemeinsamen Linearfaktor $(x-a)$ dividirt und alsdann für x den Werth a setzt.

23. Eine Funktion heißt stetig, wenn zu jeder gegebenen Größe $\varepsilon > 0$ eine Größe δ so bestimmt werden kann, dass für alle Änderungen der Variablen um weniger als δ, die Änderung der Funktion Kleiner als ε wird.

Partialbruchzerlegung.

1. Die Summe oder die Differenz mehrerer ächter Brüche ist wieder ein ächter Bruch.

2. Ein unächter Bruch kann durch Division des Nenners in den Zähler stets in eine ganze Funktion und in einen ächten Bruch zerlegt werden.

3. Ein ächter Bruch kann stets in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden, deren Zähler constante Größen, deren Nenner aber Linearfaktoren der Funktion im Nenner des gegebenen Bruches sind; d.h. ist $\frac{f(x)}{g(x)}$ ein ächter Bruch, so kann stets geschrieben werden,

$$
\begin{aligned}
y = {} & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots\cdots(x_1-x_n} y_1 \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots\cdots(x_2-x_n)} y_2 \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots\cdots(x_3-x_n)} y_3 \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)(x_{n-1}-x_3)\cdots\cdots(x_{n-1}-x_n)} y_{n-1} \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots\cdots(x_n-x_{n-1})} y_n
\end{aligned}
$$

11

wo $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_n y_n$ die n Werthepaare der abhängigen und unabhängigen Variablen der zu bestimmenden Funktion.

Von der Ableitung der rationalen Funktionen.

Es ist $f(x_1) - f(x)$ theilbar durch $(x_1 - x)$ folglich ist $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ ein ganzer Ausdruck.

Setzten wir $x_1 - x = h$ so dass

$$x_1 = x + h$$

so lautet obiger Ausdruck:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nähert sich nun h der Grenze Null, so bedeutet dieser Ausdruck:

die Ableitung der Funktion $f(x)$.

Die Ableitung einer constanten Größe ist gleich Null.

Wir geben nun folgende

21 $f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

3) Taylor'sche Reihe:

22 $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)\,h^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(a)\cdot h^n}{n!}$

4) Binomische Reihe:

23 $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$

speziell:

24 $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots +$

Unendliche Reihen.

Unterscheidung derselben in convergente und divergente; erstere sind solche, bei denen sich die Summe der n ersten Glieder bei wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze nähert, während bei letzterem sich diese Summe keiner endlichen oder keiner bestimmten Grenze nähert.

Damit eine Reihe convergent sei, ist zwar nothwendig (aber noch nicht hinreichend), dass das allgemeine Glied bei wachsendem n sich der Grenze Null nähere.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots\cdots$$

ist keine convergente Reihe.

beständig bis zum Verschwinden abnehmen.

Die Summe zweier oder mehrer convergenter Reihen ist wieder eine convergente Reihe.

Die Differenz zweier convergenter Reihen ist wieder eine convergente Reihe.

Das Produkt zweier oder mehrerer convergenter Reihen ist wieder eine convergente Reihe.

Potenzreihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Beispiel: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots = 2$

Convergenzcriterien: Nähert sich bei wachsendem n der Ausdruck

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

einer bestimmten Grenze g, so ist die Reihe convergent, wenn

$$x < \frac{1}{g} \quad ;$$

oder:

nähert sich bei wachsendem n der Ausdruck

$$\sqrt[n]{a_n}$$

einer bestimmten endlichen Grenze g, so ist die Reihe convergent, wenn

$$x < \frac{1}{g}$$

Die Summe oder das Produkt zweier Potenzreihen ist wieder eine Potenzreihe.

Additionstheorem des Logarithmus:

34 $$l(x \cdot y) = l(x) + l(y)$$

35 $$l\left(\frac{x}{y}\right) = l(x) - l(y)$$

36 $$l(x^n) = n \cdot l(x)$$

e ist die natürliche Logarithmen basis. Wollen wir von den natürlichen zu irgend einem andern für die Basis a übergehen, so müssen wir den natürlichen Logarithmus mit dem Modulus

$$M = \frac{1}{l(a)}$$

multiplizieren, d.h. es ist:

37 $$\log_a(x) = M \cdot l(x) = \frac{l(x)}{l(a)}$$

Für die Basis 10 ist

$$M = 0{,}434294481 9\ldots$$

---

38 $$\lim\left(\frac{e^k - 1}{k}\right)_{k=0} = 1$$

39 $$\lim\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0} = e$$

---

2. Gruppe: Kreis = & Cyclometrische Funktionen:

a) Kreisfunktionen:

$\sin x \quad \cos x \quad \operatorname{tg} x \quad \operatorname{ctg} x$

$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Additionstheorem des Logarithmus:

34 $$l(x \cdot y) = l(x) + l(y)$$

35 $$l\left(\frac{x}{y}\right) = l(x) - l(y)$$

36 $$l(x^n) = n \cdot l(x)$$

e ist die natürliche Logarithmen Basis. Wollen wir von den natürlichen zu irgend einem andern für die Basis a übergehen, so müssen wir den natürlichen Logarithmus mit dem Modulus

$$M = \frac{1}{l(a)}$$

multiplizieren, d.h. es ist:

37 $$\log_a(x) = M \cdot l(x) = \frac{l(x)}{l(a)}$$

Für die Basis 10 ist

$$M = 0{,}434294481 9 \ldots$$

---

38 $$\lim\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)_{h=0} = 1$$

39 $$\lim\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0} = e$$

---

2. Gruppe: Kreis = & Cyclometrische Funktionen:

a) Kreisfunktionen:

$\sin x \quad \cos x \quad \operatorname{tg} x \quad \operatorname{ctg} x$

$\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Ist $0 < x < \frac{\pi}{2}$ so ist

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$\lim_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \qquad 40$$

6. cyclometrische Funktionen: Dieselben sind die Umkehrungen der Kreisfunktionen.

$y = \arcsin(x)$ bedeutet den zwischen $+\frac{\pi}{2}$ u. $-\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen, dessen Sinus gleich x ist, so dass man hat:

$$x = \sin(y) .$$

$y = \arccos(x)$ bedeutet den zwischen 0 und π liegenden Bogen, dessen Cosinus x ist, so dass man hat:

$$x = \cos(y) .$$

$y = \operatorname{arctg}(x)$ bedeutet den zwischen $+\frac{\pi}{2}$ u. $-\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen, dessen Tangente x ist, so dass man hat

$$x = \operatorname{tg}(y) .$$

$y = \operatorname{arccotg}(x)$ bedeutet den zwischen 0 und π liegenden Bogen, dessen Cotangente x ist, so dass man hat

$$x = \operatorname{cotg}(y) .$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x \text{ u. } \arcsin(\sin(x)) = x \qquad 41$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad 42$$

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \qquad 4$$

Weiter folgen:

44 $$\arccos(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

45 $$\arcsin(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2})$$

46 $$\operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

47 $$\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

48 $$\arcsin(x) + \arcsin(y) = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

49 $$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

50 $$\arcsin(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

51 $$\operatorname{arctg}(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Ableitung der Funktionen.

Allgemeine Formeln:

52 $$\frac{d(u+v+w+\cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \cdots$$

53 $$\frac{d\,au}{dx} = a\frac{du}{dx}$$

54 $$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

55 $$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Sind x und y als Funktionen einer dritten Variablen gegeben:

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \psi(t)$$

so findet man die Ableitung von y nach x nach der Formel:

56 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ableitung von transcendenten Funktionen:

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x \qquad \frac{d\,a^x}{dx} = a^x l(a) \qquad 57\ 58$$

$$\frac{d\,x^m}{dx} = m\,x^{m-1} \qquad 59$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \frac{d\,\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2} \qquad 60\ 61$$

$$\frac{d\,l(x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d\log(x)}{dx} = \frac{1}{l(a)}\cdot\frac{1}{x} \qquad 62\ 63$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 64\ 65$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \qquad \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 66\ 67$$

$$\frac{d\,tg(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2 x \qquad \frac{d\arctg(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad 68\ 69$$

$$\frac{d\,cotg(x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -[1+cotg^2 x] \qquad \frac{d\,arccotg(x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad 70\ 71$$

$$\frac{d\,l\{x+\sqrt{x^2-a^2}\}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad 72$$

$$\frac{d\left\{\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right\}}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \qquad 73$$

Nach der Formel:

$$\frac{d\,\varphi(u)}{dx} = \frac{d\,\varphi(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

wo u eine Funktion von x ist, werden die obigen Formeln erweitert, wie folgt:

$$\frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx} \qquad \frac{da^u}{dx} = l(a)\, a^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du^n}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dl(u)}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \frac{d\log(u)}{dx} = \frac{1}{l(a)} \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\sin(u)}{dx} = \cos(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d\arcsin(u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\cos(u)}{dx} = -\sin(u) \frac{du}{dx} \qquad \frac{d\arccos(u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\operatorname{tg}(u)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(u)} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d\operatorname{arctg}(u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\operatorname{cotg}(u)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2(u)} \frac{du}{dx} \qquad \frac{d\operatorname{arccotg}(u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dl\{u+\sqrt{u^2-a^2}\}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\{\frac{1}{2} l(\frac{1+u}{1-u})\}}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$$

Ableitungen höherer Ordnung.

Allgemeine Formeln:

$$\mathfrak{D}^{(n)} a.u = a\, \mathfrak{D}^{(n)} u$$

$$\mathfrak{D}^{(n)}(u+v) = \mathfrak{D}^{(n)} u + \mathfrak{D}^{(n)} v$$

$$\mathfrak{D}^{(n)}(u.v) = u\mathfrak{D}^{(n)} v + \binom{n}{1} \mathfrak{D}u\, \mathfrak{D}^{(n-1)} v + \binom{n}{2} \mathfrak{D}^2 u\, \mathfrak{D}^{(n-2)} v + \ldots + v\mathfrak{D}^{(n)} u$$

$$\frac{d^{(n)} l(x)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$\frac{d^{(n)} \log(x)}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{l(a)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$\frac{d^{(n)}e^x}{dx^n} = e^x \qquad \frac{d^{(n)}a^x}{dx^n} = (l(a))^n a^x \qquad 94\ 95$$

$$\frac{d^{(n)}x^k}{dx^n} = k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-n+1)x^{k-n} \qquad 96$$

$$\frac{d^{(n)}\sin(x)}{dx^n} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad 97$$

$$\frac{d^{(n)}\cos(x)}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad 97$$

Lehrsatz von Taylor.

Satz: Zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, liegt eine ungerade Anzahl Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$.

Mittelwerthsatz der Differenzialrechnung:

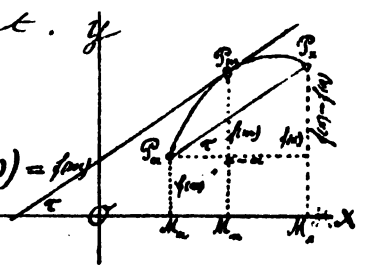
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a + \vartheta(x-a)) \qquad 99$$

wo ϑ einen positiven ächten Bruch und a und x irgend zwei Werthe der Variablen bedeuten, innerhalb welchen sich die Funktion stetig ändert.

Die Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a + \vartheta(a-a)) = \tan\tau$$

und also geometrisch interpretirt sagt derselbe:



Sind auf der stetigen Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, irgend zwei Punkte mit den Abscissen

a und x gegeben, so existirt stets ein Punkt der Kurve, dessen Abscisse zwischen a und x liegt, in welchem die Tangente der Kurve parallel ist zu der die ersteren verbindenden Sekante.

Restformeln für den Maclaurin'schen Lehrsatz:

100 $$R = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta(x-a))$$ (Lagrange)

101 $$R = \frac{(x-a)^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \vartheta(x-a))$$ (Cauchy)

Restformel der Taylor'schen Reihe:

102 $$R = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \vartheta h)$$ (L)

103 $$R = \frac{h^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \vartheta h)$$ (C)

Restformel der speziellen Maclaurin'schen Reihe:

104 $$R = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x)$$ (L)

105 $$R = \frac{x^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n}(\vartheta x)$$ (C)

Die Taylor'schen und Maclaurin'schen Formeln dienen dazu, gegebene Funktionen in unendliche Reihen zu entwickeln, wenn man nachweisen kann, dass sich der betreffende Rest bei wachsendem n der Grenze Null nähert.

Potenzreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R \qquad 106$$

$$R = \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x}$$

Cosinusreihe:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R \qquad 107$$

$$R = \frac{x^{2n}}{2n!} (-1)^n \cos(\vartheta x)$$

Sinusreihe:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + R \qquad 108$$

$$R = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} (-1)^n \cos(\vartheta x)$$

Bei diesen Reihen nähert sich R bei wachsendem n der Grenze Null und sind nach ihrer resp. Bildung ad infinitum fortzusetzen, da sie also convergent.

Logarithmische Reihe:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)} + R \qquad 109$$

$$R = \frac{x^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(n+\vartheta x)^n} \cdot (-1)^{n+1}$$

Diese Reihe ist convergent für alle Werthe von x die kleiner oder gleich „1" sind.

Binomische Reihe:

$$(1+x)^K = 1 + Kx + \binom{K}{2} x^2 + \cdots + \binom{K}{n-2} x^{n-2} + R \qquad 110$$

$$R = \frac{(K-1)(K-2)(K-3)\cdots(K-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot Kx \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1} \left(1+\vartheta x\right)^{K-n}$$

Diese Reihe ist convergent für alle Werthe von x die kleiner sind als 1.

Satz: Wenn zwei Functionen dieselbe Ableitung haben, so muss ihre Differenz eine Constante sein, — ein Satz, mit Hülfe welchem einige Reihen abgeleitet werden können; z.B. es sei

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) \quad \text{so ist} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ferner sei $g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

so ist $g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots$

Lt. Binom. Satz ist aber

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{also}$$

ist $g'(x) = f'(x)$ folglich

$$g(x) - f(x) = c \quad \text{also} \quad f(x) = c + g(x)$$

dh. $\operatorname{arctg}(x) = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \cdots$

Zur Bestimmung von c setzen wir in dieser identischen Gleichung an Stelle von x den Werth 0 und erhalten: $0 = c$, also lautet die Reihe:

111 $$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

Analog findet man:

112 $$\operatorname{arcsin}(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

113 $$\frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

114 $$l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - + \cdots$$

Regula falsi:

Sind a und b zwei angenäherte Wurzelwerthe einer algebraischen Gleichung höheren Grades $f(x) = 0$, so findet man einen noch genaueren Werth durch

die Formeln:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = a - \frac{f(a) \cdot (b-a)}{f(b) - f(a)} \qquad 115$$

Kennt man blos einen angenäherten Werth der Wurzel, so kann zur Bestimmung eines genauern Werthes auch angewendet werden die Newton'sche Formel:

$$c = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad 116$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln kann man dem wirklichen Wurzelwerthe so nahe kommen als man will.

Noch genauer ist für diesen Zweck die Reihe:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{(f'(a))^3}\frac{(f(a))^2}{1.2} - \frac{3(f''(a))^2 - f'(a)f'''(a)}{(f'(a))^5}\cdot\frac{(f(a))^3}{1.2.3} - \ldots \qquad 117$$

Über scheinbar unbestimmte Funktionen.

Nimmt ein Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x=a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, so stehen uns zur Bestimmung des wahren Werthes folgende drei Wege offen:

1. Wir dividiren Zähler und Nenner des Bruches so oft mals als möglich mit dem Ausdruck $(x-a)$ und setzen an Stelle der Variablen die Größe a. (Bei rationalen Funktionen).

2. Wir differenziren Zähler und Nenner

des Bruches $\frac{f(x)}{g(x)}$ so lange, jeden für sich, (doch beide gleich oft) nach x, bis durch Einsetzen des Wertes a an Stelle von x ein Ausdruck $\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ herauskommt, der die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ nicht mehr hat.

3. Wir können unter Umständen den Zähler in eine unendliche Reihe entwickeln, mit dem Nenner Glied für Glied dividieren und für x die Größe a einsetzen.

Nimmt ein Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, so werden wir die für die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ unter 2) angegebene Methode anzur Reduktion auf eine bestimmte Form.

Haben wir ein Produkt $f(x) \cdot g(x)$, welches für $x = a$ die Form $0 \cdot \infty$ annimmt, so setzen wir $g(x)$, welches für $x = a$ unendlich groß wird, gleich $\frac{1}{\varphi(x)}$ und haben dann $f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welche Funktion nun für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und nun weiter reduziert werden kann.

Die unbestimmten Formen: 0^0, ∞^0, 1^∞, welche eine Funktion u^v annehmen kann, für $x = a$, werden reduziert auf die Form $0 \cdot \infty$ und damit auf eine Form, welche bekannt ist zu behandeln, indem wir die Gleichung benützen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

oder nach der andern Variablen:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y} \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

und es gilt der Satz:

118 $$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x}$$

Analog für Funktionen dreier und mehrerer Variabler.

Totale Differenziation. Haben wir eine Funktion zweier Variabler $f(x,y)$, wo x und y als Funktionen einer dritten unabhängigen Variablen t gegeben sind so wird sie nach folgender Formel total nach t differenziert:

114 $$\frac{df(x,y)}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

was kurz geschrieben werden kann;

119' $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$ oder

119'' $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Daraus ergibt sich die zweite Ableitung:

121 $$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{dx\,dy}{dt^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Analog ergibt sich die Sache für Funktionen mit drei Variablen:

Für homogene Funktionen n^{ter} Grades bestehen die identischen Gleichungen:

124 $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = n f(x,y)$$

125 $$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial t} = n t^{n-1} f(x,y)$$

Anhang.
Complexe Grössen.

Wenn wir eine Gleichung zweiten Grades auflösen:

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

so erhalten wir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$$

wo $$D = b^2 - ac$$

Ist D negativ, so wird der Ausdruck $\sqrt{D} = iK$ imaginär, also der für x complex; es ist also

$$x = \frac{-b \pm iK}{a} = -\frac{b}{a} \pm i\frac{K}{a}$$

oder kurz

$$x_1 = \alpha + i\beta \qquad x_2 = \alpha - i\beta$$

Solche zwei Ausdrücke heissen complex conjugirt, und wir haben die Sätze:

1) Die Summe zweier conjugirt imaginärer Grössen $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ ist reel, nämlich gleich 2α.

2) Das Produkt (= Norm) zweier conjugirt imaginärer Grössen $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$

Das Produkt zweier complexer Größen ist wieder eine complexe Größe:

128 $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 - b_1 a_2) = x + iy$

wo also

$$x^2 + y^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

Der absolute Werth des Produktes ist also gleich dem Produkte der absoluten Werthe der Faktoren.

Der Quotient zweier complexer Größen ist wieder eine complexe Größe:

129 $$(a_1 + ib_1) : (a_2 + ib_2) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

und es ist hier

$$x^2 + y^2 = \frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_2^2 + b_2^2)^2} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2},$$

d.h. der absolute Werth des Quotienten ist gleich dem Quotienten der absoluten Werthe von Dividend und Divisor.

Für Polar coordinaten finden wir:

130 $$r_1(\cos v_1 + i \sin v_1) \cdot r_2(\cos v_2 + i \sin v_2) = r_1 r_2 \{\cos(v_1 + v_2) + i \sin(v_1 + v_2)\}$$

und

131 $$\frac{r_1(\cos v_1 + i \sin v_1)}{r_2(\cos v_2 + i \sin v_2)} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(v_1 - v_2) + i \sin(v_1 - v_2)\}$$

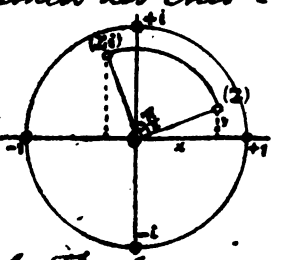
d.h. die Anomalie des Produktes (des Quotienten) ist gleich der Summe der Anomalien der Faktoren, (der Differenz der Anomalien des Dividenden und des Divisors) und der Radius vektor des Produktes (des Quotienten) ist gleich dem Produkte (dem Quotienten) der Radien vektoren der Faktoren (vom Dividend

Lassen wir k variiren von Null bis (n−1), so erhalten wir die n Werthe von $\sqrt[n]{1}$.
Sollen die n Werthe der n^ten Wurzel aus einer Zahl a gefunden werden, so schreiben wir:

$$\sqrt[n]{a} = |\sqrt[n]{a}|\ \sqrt[n]{1}$$

multiplizieren aber irgend einen Werth von $\sqrt[n]{a}$ (z.B. den einfachsten Hauptwerth) mit den n Werthen der Größe $\sqrt[n]{1}$

Wollen wir die n Punkte der Zahlenebene finden, welche den n Werthen des Ausdruckes $\sqrt[n]{a}$ entsprechen, so theilen wir den mit dem Radius von der Größe des Hauptwerthes von $\sqrt[n]{a}$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis in n gleiche Theile vom Schnittpunkt desselben mit der positiven x-Axe aus. Die Punkte auf dem Kreis entsprechen den n Werthen von $\sqrt[n]{a}$.



Der Multiplikation einer Größe $z = x + iy$ mit i entspricht geometrisch eine Drehung ihres Zahlenbildes um 90° im Kreise um den Anfangspunkt.

Für die Quadratwurzel aus einer complexen Größe haben wir die Formel:

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right\}$$

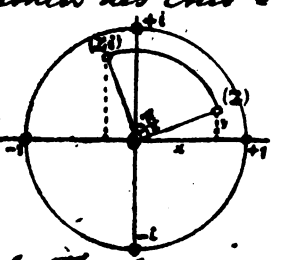
wo für $\sqrt{a^2+b^2}$ der Hauptwerth genommen und der zweiten Wurzel das Zeichen der Größe

Lassen wir k variiren von Null bis (n−1), so erhalten wir die n Werthe von $\sqrt[n]{1}$.
Sollen die n Werthe der n ten Wurzel aus einer Zahl a gefunden werden, so schreiben wir:

$$\sqrt[n]{a} = |\sqrt[n]{a}|\ \sqrt[n]{1}$$

multiplizieren aber irgend einen Werth von $\sqrt[n]{a}$ (: am einfachsten den Hauptwerth:) mit den n Werthen der Größe $\sqrt[n]{1}$

Wollen wir die n Punkte der Zahlenebene finden, welche den n Werthen des Ausdruckes $\sqrt[n]{a}$ entsprechen, so theilen wir den mit dem Radius von der Größe des Hauptwerthes von $\sqrt[n]{a}$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis in n gleiche Theile vom Schnittpunkt desselben mit der positiven axe aus. Die Punkte auf dem Kreis entsprechen den n Werthen von $\sqrt[n]{a}$.



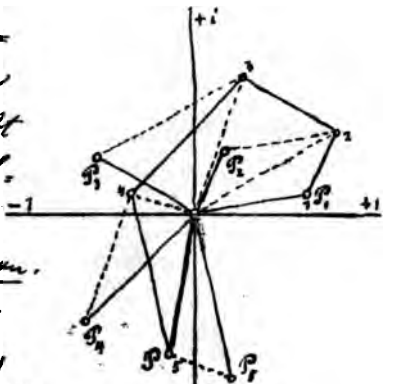
Der Multiplikation einer Größe $z = x + iy$ mit i entspricht geometrisch eine Drehung ihres Zahlenbildes um 90° im Kreise um den Anfangspunkt.

Für die Quadratwurzel aus einer complexen Größe haben wir die Formel:

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right\}$$

wo für $\sqrt{a^2+b^2}$ der Hauptwerth genommen und der zweiten Wurzel das Zeichen der Größe

zu dem Parallelogramme $0 P_1 P P_2$. Die dem 0-Punkte gegenüberliegende Ecke P ist der Ort der gesuchten Summe. Dieselbe Figur veranschaulichet die Methode der Subtraktion. — Wie bei der Addition mehrerer Größen zu verfahren ist, ergibt sich aus der nebenstehenden Figur.



Graphische Multiplikation.

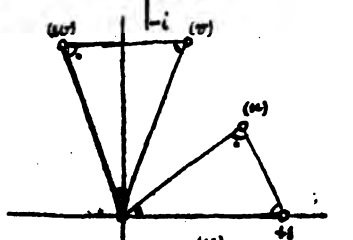
Soll gefunden werden

$$w = u\,v \quad ,$$

so schreiben wir dieselbe Proportion:

$$1 : u = v : w$$

und construiren danach wie die Figur lehrt mit ähnlichen Dreiecken.

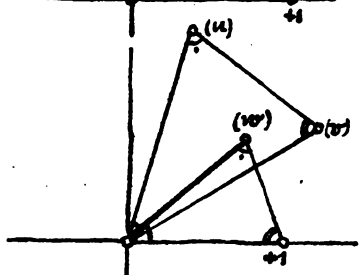


Graphische Division.

Ihre Methode ergibt sich aus der Multiplikation. Die Gleichung

$$w = \frac{u}{v}$$

schreiben wir $\frac{w}{1} = \frac{u}{v}$ und construiren nach derselben, wie die Figur lehrt, mit ähnlichen Dreiecken.



Größe hinzufügen, was überhaupt bei allen unbestimmten Integralen gemacht werden darf.

Satz:

$$\int a y \, dx = a \int y \, dx$$

d.h. ein constanter Faktor darf vor das Integral-zeichen genommen werden.

Methode der Zerlegung.

$$\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$$

Methode der partiellen Integration.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Methode der Substitution.

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt$$

wenn $x = \varphi(t)$

gesetzt werde.

Ist der Zähler bis auf einen constanten Faktor die Ableitung des Nenners, so führt man für diesen eine neue Variable ein. Dadurch ergibt sich die wichtige Formel:

$$\int \frac{f'(x) \, dx}{f(x)} = l\{f(x)\}$$

28 $$\int \frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{ax^2+2bx+c} = p\,l\{ax^2+2bx+c\} + \frac{q}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{ax+b}{\sqrt{-D}}$$

wo die Größen p und q durch Differenziation der beiden Seiten der Gleichung bestimmt werden als constante Zahlen, denn die Gleichung ist eine identische. Wäre die Determinante D positiv, so würde die Integration nach einer sogleich folgenden Regel für die Integration rationaler Funktionen zu erfolgen haben:

Ganze Funktionen werden integrirt, indem man dieselben in die einzelnen Glieder zerlegt.

Gebrochene Brüche zerlegt man in ganze Funktionen und in ächte Brüche und integrirt dann jeden Theil für sich.

Aechte Brüche werden integrirt, indem man dieselben in Partialbrüche zerlegt & alsdann diese einzeln integrirt. Enthält jedoch der Nenner $g(x)$ des ächten Bruches $\frac{f(x)}{g(x)}$ eine Anzahl paarweis conjugirt imaginärer Wurzeln, so gestaltet die Partialbruchzerlegung, abweichend von dem gewöhnlichen nach folgendem Schema:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{a_1x^2+2b_1x+c_1} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{a_2x^2+2b_2x+c} + \cdots + \frac{\gamma_1}{x-x_1} + \frac{\gamma_2}{x-x_2} + \cdots$$

wo die Coefficienten α_1, β_1, α_2, β_2, γ_1, $\gamma_2 \cdots$ zu bestimmen und wo

$$g(x) = (a_1x^2+2b_1x+c_1)(a_2x^2+2b_2x+c_2)\cdots(x-x_1)(x-x_2)\cdots,$$

also x_1, x_2, $\cdots$ die reellen Wurzeln der

ein Paar conjugirt imaginäre Wurzeln, so ist doch $\{(x-A_1)(x-A_2)\}^n$ stets eine reelle Größe. Dagegen hat man im transcendenten Theile statt der Logarithmen der betreffenden conjugirt complexen Linearfaktoren anzusetzen den Logarithmus einer quadratischen Funktion (das Produkt der beiden conjugirt complexen Linearfaktoren) und ferner den arcustangens einer linearen Funktion. Totalen $\int \frac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen, wo z.B.

$$g(x) = (x-A_1)^{\alpha+1}(x-A_2)^{\alpha+1}(x-B_1)^{\beta+1}(x-B_2)^{\beta+1}(x-C)^{\gamma+1}$$

so würde man folgenden Ansatz machen:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\varphi(x)}{\{(x-A_1)(x-A_2)\}^{\alpha}\{(x-B_1)(x-B_2)\}^{\beta}(x-C)^{\gamma}}$$

$$+ p_1 l\{a_1x^2+2b_1x+c_1\} + p_2 l\{a_2x^2+2b_2x+c_2\} + r\,l\{x-C\}$$

$$+ \frac{q_1}{\sqrt{-\delta_1}} \operatorname{arctg} \frac{a_1x+b_1}{\sqrt{-\delta_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{-\delta_2}} \operatorname{arctg} \frac{a_2x+b_2}{\sqrt{-\delta_2}}$$

wo $a_1x^2+2b_1x+c_1 = (x-A_1)(x-A_2)$ also $\delta_1 = b_1^2-a_1c_1$

$a_2x^2+2b_2x+c_2 = (x-B_1)(x-B_2)$ " $\delta_2 = b_2^2-a_2c_2$

und wo $\varphi(x)$ bekanntlich vom Grade $\alpha+2\beta+\gamma-1$ ist. Die constanten Coefficienten

$$p_1, p_2 \quad q_1, q_2 \quad r$$

werden bestimmt durch Differentiation.

Integration einiger irrationaler Funktionen.

Funktionen wie

$$F(x^\alpha, x^\beta x^\gamma \ldots) \quad (1)$$

wo $\alpha \beta \gamma \ldots$ rationale Brüche, deren Gemeinnenner ν ist, werden integrirt, indem man die Substitution

$$x = t^\nu \qquad \text{einführt,} \qquad (31)$$

und sodann hat:

$$\int F(t^{\varkappa\nu}, t^{\beta\nu}, t^{\gamma\nu} \ldots) \nu t^{\nu-1} dt,$$

wo nun $\varkappa\nu$ $\beta\nu$, $\gamma\nu$ ... ganze Zahlen sind.

Bei der Integration von

$$F(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})$$

setzt man eine der Wurzeln gleich einer neuen Variablen z.B.

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = u \qquad (32)$$

Bei der Integration von $F(x,y)$, wo, wie auch immer in den folgenden späteren Integrationsformeln,

$$y = \sqrt{ax^2+2bx+c}$$

bedeutet, kann man verschiedene Substitutionen machen:

$$\text{I} \qquad y = t - x\sqrt{c} \qquad (33)$$

$$\text{II} \qquad y = tx + \sqrt{c} \qquad (34)$$

$$\text{III} \qquad \frac{x-\beta}{x-\alpha} = t^2 \qquad (35)$$

wo α und β die Wurzeln der Gleichung

$$y^2 = 0 \qquad \text{wo dann}$$

also $$y = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Kann man $F(x,y)$ nach steigenden Potenzen von y anordnen, so kann man also setzen

$$F(x,y) = f_0(x) + f_1(x)\,y + f_2(x)\,y^2 + f_3(x)\,y^3 + \cdots$$

oder

$$F(x,y) = (f_0(x) + f_2(x)\,y^2 + f_4(x)\,y^4 + \cdots) + y\,(f_1(x) + f_3(x)\,y^2 + f_5(x)\,y^4 + \cdots)$$

oder

$$F(x,y) = (f_0(x) + f_2(x)\,y^2 + \cdots) + \frac{y^2(f_1(x) + f_3(x)\,y^2 + \cdots)}{y}$$

welches kürzer geschrieben werden kann:

$$F(x,y) = F_1(x) + \frac{F_2(x)}{y}$$

wo nun, da y^2 rational ist, $F_1(x)$ und $F_2(x)$ rationale Funktionen von x bedeuten. Die Integration von $F(x,y)$ ist also zurückgeführt auf die Integration einer rationalen Funktion $F_1(x)$ und auf die Integration einer Funktion von der Form

$$\frac{f_n(x)}{y}\,,$$

für welche folgende Integrationsformeln existieren:

1) $f_n(x)$ ist eine ganze Funktion n^{ten} Grades von x:

$$\int \frac{f_n(x)\,dx}{y} = g_{n-1}(x)\cdot y + K\int \frac{dx}{y}\,,$$

wo durch Differenziation die Coefficienten K, sowie diejenigen der ganzen Funktion

$$g_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

bestimmt werden. Zu bemerken ist, dass

Grösse hinzufügen, was überhaupt bei allen unbestimmten Integralen gemacht werden darf.

Satz:

$$\int a y \, dx = a \int y \, dx$$

d.h. ein constanter Faktor darf von das Integral-zeichen genommen werden.

Methode der Zerlegung.

$$\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$$

Methode der partiellen Integration.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Methode der Substitution.

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt$$

wenn $x = \varphi(t)$

gesetzt wurde.

Ist der Zähler bis auf einen constanten Faktor die Ableitung des Nenners, so führt man für diesen eine neue Variable ein. Dadurch ergibt sich die wichtige Formel:

$$\int \frac{f'(x) \, dx}{f(x)} = l\{f(x)\}$$

28 $$\int \frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{ax^2+2bx+c} = p\,l\{ax^2+2bx+c\} + \frac{q}{\sqrt{-D}} \arctg \frac{ax+b}{\sqrt{-D}}$$

wo die Größen p und q durch Differenziation der beiden Seiten der Gleichung bestimmt werden als constante Zahlen, denn die Gleichung ist eine identische. (Wäre die Determinante D positiv, so würde die Integration nach einer sogleich folgenden Regel für die Integration rationaler Funktionen zu erfolgen haben.)

Ganze Funktionen werden integrirt, indem man dieselben in die einzelnen Glieder zerlegt.

Gebrochene Brüche zerlegt man in ganze Funktionen und in ächte Brüche und integrirt dann jeden Theil für sich.

Aechte Brüche werden integrirt, indem man dieselben in Partialbrüche zerlegt & alsdann diese einzeln integrirt. Enthält jedoch der Nenner $g(x)$ des ächten Bruches $\frac{f(x)}{g(x)}$ eine Anzahl paarweis conjugirt imaginärer Wurzeln, so geschieht die Partialbruchzerlegung, abweichend von dem gewöhnlichen nach folgendem Schema:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha_1 x+\beta_1}{a_1x^2+2b_1x+c_1} + \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{a_2x^2+2b_2x+c} + \cdots + \frac{\gamma_1}{x-x_1} + \frac{\gamma_2}{x-x_2} + \cdots$$

wo die Coefficienten α_1, β_1, α_2, β_2, γ_1, γ_2 $\cdots$ zu bestimmen und wo

$$g(x) = (a_1x^2+2b_1x+c_1)(a_2x^2+2b_2x+c_2)\cdots(x-x_1)(x-x_2)\cdots,$$

also x_1, x_2, $\cdots$ die reellen Wurzeln der

ein Paar conjugirt imaginärer Wurzeln, so ist doch $\{(x-A_1)(x-A_2)\}^{\alpha}$ stets eine reelle Größe. Dagegen hat man im transcendenten Theile statt der Logarithmen der betreffenden conjugirt complexen Linearfaktoren anzusetzen den Logarithmus einer quadratischen Funktion (: das Produkt der beiden conjugirt complexen Linearfaktoren :) und ferner den arcustangens einer linearen Funktion. Ist also $\int \frac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen, wo z.B.

$$g(x) = (x-A_1)^{\alpha+1}(x-A_2)^{\alpha+1}(x-B_1)^{\beta+1}(x-B_2)^{\beta+1}(x-C)^{\gamma+1}$$

so würde man folgenden Ansatz machen:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\varphi(x)}{\{(x-A_1)(x-A_2)\}^{\alpha}\{(x-B_1)(x-B_2)\}^{\beta}(x-C)^{\gamma}}$$

$$+ p_1 l\{a_1x^2+2b_1x+c_1\} + p_2 l\{a_2x^2+2b_2x+c_2\} + r\, l\{x-C\}$$

$$+ \frac{q_1}{\sqrt{-D_1}} \operatorname{arctg} \frac{a_1x+b_1}{\sqrt{-D_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{-D_2}} \operatorname{arctg} \frac{a_2x+b_2}{\sqrt{-D_2}}$$

wo $a_1x^2+2b_1x+c_1 = (x-A_1)(x-A_2)$ also $D_1 = b_1^2-a_1c_1$

$a_2x^2+2b_2x+c_2 = (x-B_1)(x-B_2)$ " $D_2 = b_2^2-a_2c_2$

und wo $\varphi(x)$ höchstens vom Grade $2\alpha+2\beta+\gamma-1$ ist. Die constanten Coeffizienten

p_1, p_2 q_1, q_2 r

werden bestimmt durch Differentiation &c.

Integration einiger irrationaler Funktionen.

Funktionen wie

$$F(x^\alpha, x^\beta x^\gamma \ldots) \qquad 1$$

wo $\alpha \beta \gamma \ldots$ rationale Brüche, deren Generalnenner ν ist, werden integrirt, indem man die Substitution

$$x = t^\nu \qquad \text{einführt,} \qquad 31$$

und sodann hat:

$$\int F(t^{\alpha\nu}, t^{\beta\nu}, t^{\gamma\nu} \ldots) \nu t^{\nu-1} dt,$$

wo nun $\alpha\nu$ $\beta\nu$ $\gamma\nu$ ... ganze Zahlen sind.

Bei der Integration von

$$F(x, \sqrt{\alpha x+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta})$$

setzt man eine der Wurzeln gleich einer neuen Variablen z.B.

$$\sqrt{\alpha x+\beta} = u \qquad 32$$

Bei der Integration von $F(x, y)$, wo, wie auch immer in den folgenden späteren Integrationsformeln,

$$y = \sqrt{ax^2+2bx+c}$$

bedeutet soll, kann man verschiedene Substitutionen machen

I $\qquad y = t - x\sqrt{c}$ $\qquad 33$

II $\qquad y = tx + \sqrt{c}$ $\qquad$ "

III $\qquad \frac{x-\beta}{x-\alpha} = t^2$ $\qquad 33$

wo α und β die Wurzeln der Gleichung

$$y^2 = 0 \qquad \text{wo dann}$$

also $$y = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Kann man $F(x,y)$ nach steigenden Potenzen von y anordnen, so kann man also setzen

$$F(x,y) = f_0(x) + f_1(x)\,y + f_2(x)\,y^2 + f_3(x)\,y^3 + \cdots$$

oder

$$F(x,y) = (f_0(x) + f_2(x)\,y^2 + f_4(x)\,y^4 + \cdots) + y\,(f_1(x) + f_3(x)\,y^2 + f_5(x)\,y^4 + \cdots)$$

oder

$$F(x,y) = (f_0(x) + f_2(x)\,y^2 + \cdots) + \frac{y^2(f_1(x) + f_3(x)\,y^2 + \cdots)}{y}$$

welches kürzer geschrieben werden kann:

$$F(x,y) = F_1(x) + \frac{F_2(x)}{y}$$

wo nun, da y^2 rational ist, $F_1(x)$ und $F_2(x)$ rationale Funktionen von x bedeuten. Die Integration von $F(x,y)$ ist also zurückgeführt auf die Integration einer rationalen Funktion $F_1(x)$ und auf die Integration einer Funktion von der Form

$$\frac{f_n(x)}{y}\,,$$

für welche folgende Integrationsformeln existieren:

1) $f_n(x)$ ist eine ganze Funktion n^{ten} Grades von x:

$$\int \frac{f_n(x)\,dx}{y} = g_{n-1}(x)\cdot y + K\int \frac{dx}{y}\,,$$

wo durch Differenziation die Coefficienten K, sowie diejenigen der ganzen Funktion

$$g_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

bestimmt werden. Zu bemerken ist, dass

diese Formel nur zu gebrauchen, wenn in y die Größe a von 0 verschieden ist:)

2) $f_2(x)$ ist eine gebrochene rationale Funktion von x und zwar ist:

$$f_2(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

allwo

$$g(x) = (x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1} \ldots\ldots$$

dann ist

$$\int \frac{h(x)}{g(x)\cdot y}\,dx = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,y + p\int\frac{dx}{(x-a)y} + q\int\frac{dx}{(x-b)y} + \ldots \quad 38$$

wo $\psi(x)$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $g(x)$ und $g'(x)\cdot y^2$ und $\varphi(x)$ eine ganze Funktion von x ist, deren Grad um 1 niedriger ist als der von $\psi(x)$. —
a, b, c . . . bedeuten die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$g(x) = 0$$

oder

wir können folgenden Ansatz machen:

$$\int \frac{h(x)}{g(x)\cdot y}\,dx = y\left\{\frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\right\} + p\int\frac{dx}{(x-a)y}$$

$$+ y\left\{\frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}\right\} + q\int\frac{dx}{(x-b)y} \quad 39$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo die Coefficienten $A_0, A_1 \ldots A_{\alpha-1}$,
$B_0, B_1 \ldots B_{\beta-1} \ldots$ ferner $p, q, \ldots$ noch

zu bestimmen sind.

Hätte jedoch $y(x)=0$ eine Wurzel, die zugleich Wurzel der Gleichung $y^2=0$ wäre, so würde im algebraischen Theile die Reihe der Partialbrüche um ein ähnlich gebautes Glied vermehrt, dessen Nenner den Linear-Faktor $(x-a)$ zur $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Potenz enthielte, hingegen würde das Glied $p\int\frac{dx}{(x-a)y}$ wegfallen. Hätte man z.B.

$$\frac{k(x)}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}y}$$

zu integriren, wo $k(x)$ eine beliebige ganze Funktion von x und wo

$$y=\sqrt{(x-a)(x-c)}$$

ist, so würde man den Ansatz folgender Massen anschreiben:

$$\int\frac{k(x)dx}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}y}=y\left\{\frac{A}{(x-a)^{\alpha+1}}+\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\right\}$$

40
$$+y\left\{\frac{B_0}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\right\}+q\int\frac{dx}{(x-b)y}$$

Hat man $\frac{x^n}{y}$ zu integriren, so kann man entweder Formel 38 anwenden oder man kann die Integration zurückführen auf diejenige von $\frac{x^{n-1}dx}{y}$ resp. $\frac{dx}{y}$ durch wiederholte Anwendung folgender Formel:

41
$$\int\frac{x^n dx}{y}=\frac{x^{n-1}}{a.n}y-\frac{(2n-1)b}{a.n}\int\frac{x^{n-1}dx}{y}-\frac{(n-1)c}{a.n}\int\frac{x^{n-2}dx}{y}$$

Für die Integration von $\frac{x\,dx}{y}$ gilt folgendes:

$$\int \frac{x\,dx}{y} = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{y} \qquad 42$$

Das Integral $\int \frac{dx}{(x-\xi)^{n+1}y}$ wird bestimmt indem man setzt

$$\frac{1}{x-\xi} = t \qquad \text{sodass also:} \quad \frac{dx}{x-\xi} = -\frac{dt}{t} \qquad 43$$

Ist speziel $n=0$, so können wir auch folgende Formel anwenden:

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{f(\xi)}} \cdot l\left\{\frac{f(x,\xi) - \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(\xi)}}{x-\xi}\right\} \qquad 44$$

wo $\sqrt{f(x)} = y = ax^2+2bx+c$; $\sqrt{f(\xi)} = \sqrt{a\xi^2+2b\xi+c}$.

und wo $\sqrt{f(x,\xi)} = \sqrt{a x\xi + b(x+\xi)+c}$ ist.

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\,dx = \frac{ax+b}{2a}\,y + \frac{ac-b^2}{2a}\int \frac{dx}{y} \qquad 45$$

Die meisten Integrationen irrationaler Funktionen haben wir zurückgeführt auf die Integration von $\frac{dx}{y}$ und dazu dienen nun folgende Formeln:

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\left\{ax+b+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}\right\} \qquad 46$$

für $a>0$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\, \arcsin\left\{\frac{ax+b}{\sqrt{D}}\right\} \qquad 47$$

für $a<0$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2bx+c}} = \frac{1}{b}\sqrt{2bx+c} \qquad 48$$

für $a=0$

ist a negativ & zugleich die Determinante Δ auch negativ, so wird das Integral nach beiden Formeln 1) und 2) imaginär!)

Das Integral

$$\int \frac{f_n(x)\,dx}{\sqrt{2bx+c}}$$

betrachten wir als Spezialfall von bereits angeführten Formeln, oder setzen die Wurzel gleich einer neuen Variablen t und erhalten
49 für $x = \frac{t^2 - c}{2b}$;

oder wir machen folgenden Ansatz mit unbestimmten Coefficienten,

50
$$\int \frac{f_n(x)\,dx}{\sqrt{2bx+c}} = \sqrt{2bx+c}\cdot g_n(x)$$

wo die Coefficienten der ganzen Funktion $g_n(x)$ zu bestimmen sind.

Integration einiger transcendenter Funktionen.

Eine Funktion $F(\sin x, \cos x)$ wird rational gemacht durch die Substitution von

$$e^{ix} = t \qquad \text{also}$$

51
$$ix = l(t) \qquad \text{folgt} \qquad dx = \frac{dt}{it}$$

wo also dann:

59 $r > 0 \quad \varphi(r) = -\frac{(\sin x)^{r+1}(\cos x)^{s+1}}{r+s} + \frac{r-1}{r+s}\varphi(r-2)$

60 $r < 0 \quad \varphi(r) = \frac{(-\sin x)^{r+1}(\cos x)^{s+1}}{r+1} + \frac{r+s+2}{r+1}\varphi(r+2)$

61 $s > 0 \quad \psi(s) = \frac{(\sin x)^{r+1}(\cos x)^{s+1}}{r+s} + \frac{s-1}{r+s}\psi(s-2)$

62 $s < 0 \quad \psi(s) = -\frac{(\sin x)^{r+1}(\cos x)^{s+1}}{s+1} + \frac{r+s+2}{s+1}\psi(s+2)$

Bei der praktischen Verwendung der Recursionsformeln, sind nun folgende neun Formeln von Wichtigkeit

63 $\int dx = x$

64 $\int \sin x \, dx = -\cos x$

65 $\int \cos x \, dx = \sin x$

66 $\int \operatorname{tg} x \, dx = -l\{\cos x\}$

67 $\int \operatorname{cotg} x \, dx = l\{\sin x\}$

Die Integration ist also zurückgeführt auf die Integration von $\sin(ax)$ und $\cos(ax)$ deren Integrale sind:

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

oder allgemeiner:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

Die Integrale

$\int \cos u \sin v\,dx$; $\int \cos u \cos v\,dx$; $\int \sin u \sin v\,dx$,

wo $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$,

werden bestimmt durch Umformung mittels folgender trigonometrischer Formeln:

$$2\cos u \cos v = \cos(u-v) + \cos(u+v)$$

$$2\cos u \sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$$

$$2\sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

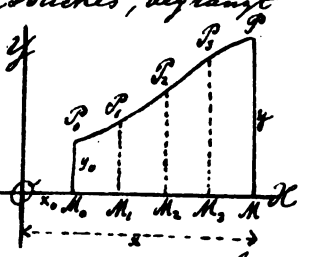
Für die übrigen transcendenten Funktionen gibt es wenig allgemeine Regeln und Formeln zur Integration mehr. In speziellen Fällen führt meistens die Methode der partiellen Integration am sichersten zum Ziele.

III. Theil.

Bestimmte Integrale.

Allgemeine Theorie.

Wenn uns eine Kurve gegeben ist, so können wir den Inhalt eines Flächenstückes, begränzt von dem ihr angehörigen Stücke P_0P_n von zwei Ordinaten y_0, y und von der x-Axe, finden, indem wir dasselbe durch unter sich und der



Y-Axe parallele Gerade in eine Anzahl sehr schmaler Flächenstreifen zerlegen, welche wir bei genügender Schmalheit als Rechtecke betrachten können. Die Summe dieser Rechtecke stellt mit mehr oder weniger Genauigkeit — je nach der Breite der einzelnen Flächenstreifen — den Flächeninhalt des ganzen Stückes dar.

$$\sum_{x_0}^{x} f(\xi)\Delta\xi = (x_1-x_0)f(\xi) + (x_2-x_1)f(\xi_1) + \cdots + (x_n-x_{n-1})f(\xi_{n-1}) \quad 1$$

wo allgemein ξ_i einen beliebigen Werth der Abs

scisse zwischen x_i und x_{i+1}. — Der Inhalt kann auch ferner ausgedrückt werden durch:

2 $$\sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x = (x_1-x_0)f(x_0) + (x_2-x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

oder

3 $$\sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x = (x_1-x_0)f(x_1) + (x_2-x_1)f(x_2) + \cdots + (x_n-x_{n-1})f(x_n)$$

oder nach anderer Bezeichnung:

4 $$\sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

oder, wenn die Flächenstreifen alle dieselbe Breite h haben:

5 $$\sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x = h\{f(x_0) + f(x_0+h) + f(x_0+2h) + \cdots + f(x_0+(n-1)h)\}$$

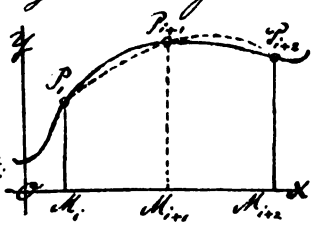
Wir können die Flächenstreifen (in diesem Falle n an Zahl und alle von gleicher Breite $\frac{x-x_0}{n}$) auch als Trapeze betrachten und erhalten, wenn wir allgemein setzen

$$f(x_i) = y_i$$

für den Flächeninhalt folgenden Ausdruck

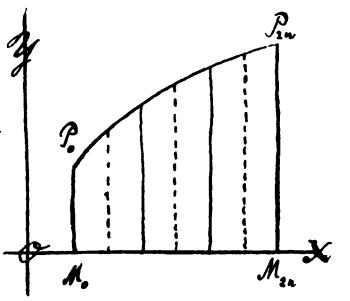
6 $$\sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x = \frac{x-x_0}{2n}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\}$$

Zur Simpson'schen Regel gelangt man, indem man durch drei aufeinanderfolgende nahe Punkte der das Flächenstück begrenzenden Kurve eine möglichst eng anschließende Parabel legt und dann den Flächeninhalt des von der Parabel begrenzten (zweidreifigen) Stückes ausrechnet.



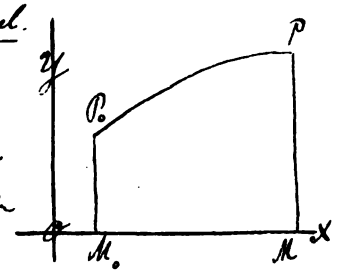
$$\sum_{x_i}^{x_{i+2}} g(\xi)\Delta\xi = \frac{x_{i+2}-x_i}{6}\left\{y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}\right\}$$

Den Werth für den Inhalt der ganzen Fläche, welche man in $2n$ gleich breite Streifen zerlegt, findet man durch Summation von n derartigen Ausdrücken & man erhält:



$$\sum_{x_0}^{x_{2n}} f(\xi)\Delta\xi = \frac{x_{2n}-x_0}{6n}\left\{y_0 + y_{2n} + 2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2}) + 4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})\right\} \quad ?$$

als Simpson'sche Näherungsformel. Absolut genau wird der Inhalt $M_0 M P P_0$ nach den fünf Gleichungen: 1) 2) 3) 4) 5) wenn wir die Breite h oder



Δx oder $(x_i - x_{i-1})$ der Streifen unendlich klein werden lassen, also die Zahl der Streifen unendlich gross; dann wird

8 $$\lim_{\Delta x = 0}\left[\sum_{x_0}^{x} f(\xi)\,\Delta\xi\right] = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$$

und wir nennen diesen Ausdruck ein <u>bestimmtes Integral</u>.

<u>Sätze über die bestimmten Integrale</u>:

9 1) $$\int_a^c f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(\xi)\,d\xi + \int_b^c f(\xi)\,d\xi \,.$$

10 2) $$\int_a^b f(\xi)\,d\xi = -\int_b^a f(\xi)\,d\xi$$

d.h. das bestimmte Integral wechselt das Vorzeichen, wenn man die beiden Grenzen a und b miteinander vertauscht.

11 3) Ein bestimmtes Integral ändert seinen Werth nicht, wenn man zu den Grenzen so viel addirt, als man von der Integrationsvariablen subtrahirt,

oder von jenem so viel subtrahirt, als man zu dieser addirt,

. ebenso ändert das Integral seinen Werth nicht, wenn man die Grenzen mit derselben Grösse multiplizirt, durch die man die Variable dividirt, oder wenn man jene durch dieselbe Grösse dividirt, mit der man diese multiplizirt.

4) $$\int_{x_0}^{x} a f(\xi)\,d\xi = a \cdot \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$$ 12

d.h. ein constanter Faktor darf von das Integralzeichen genommen werden.

5) Mittelwerthsatz der Integral-Rechnung.

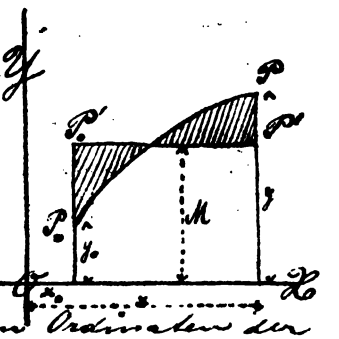
a) $$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = (x - x_0)\,M$$ wo 13

$$M = f\{x_0 + \vartheta(x - x_0)\}$$

einen Werth bedeutet, der zwischen $f(x_0)$ und $f(x)$ liegt, so dass also ϑ ein positiver ächter Bruch ist.

Geometrisch interpretirt, lautet dieser Satz: Der Inhalt eines eben von einer Kurve

begrenzten Flächenstückes $M_0 M P P_0$ ist gleich einem Rechtecke über der nämlichen Basis, dessen Höhe einen Werth hat, der zwischen den das Flächenstück seitlich begrenzenden Ordinaten der Kurve y_0 und y liegt.



Allgemeinere Gestalt des Mittelwerthsatzes:

10 b) $$\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cdot g(\xi)\, d\xi = M \cdot \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi$$ wo

$$M = f\{x_0 + \vartheta(x - x_0)\}$$

wo $g(\xi)$ zwischen $g(x)$ und $g(x_0)$ das Vorzeichen nicht ändern darf.

Integrationsmethoden.

a) Unmittelbare Methode der Integration.

15 $$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

d. h. wenn man ein bestimmtes Integral

Analytische Anwendung

der Lehre von den bestimmten Integralen

Reihenentwicklung: Es ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

Setzen wir $-\xi$ an Stelle von x, so erhalten wir:

$$\frac{1}{1+\xi} = 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + - \cdots + (-1)^{n-1}\xi^{n-1} + (-1)^n \frac{\xi^n}{1+\xi}$$

Durch Integration zwischen 0 und x finden wir:

$$l\{1+x\} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n R$$

eine Reihe, welche convergent ist für alle Werthe zwischen -1 und $+1$; es ist

$$R = \int_0^x \frac{1}{1+\xi}\,\xi^n\,d\xi$$ wenn

durch Anwendung des Mittelwerthsatzes:

$$R = \frac{1}{1+\vartheta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

als Restformel der **logarithmischen Reihe**

Integralen läßt sich die Taylor'sche Reihe entwickeln: gegeben ist

$$f(a+h-t)$$

wo t die Variable. Es ist dann

$$\frac{df(a+h-t)}{dt} = -f'(a+h-t)$$

Integriert zwischen 0 und h gibt:

$$\Big[f(a+h-t)\Big]_0^h = -\int_0^h f'(a+h-t)\,dt \quad \text{oder}$$

$$f(a+h)-f(a) = \Big[t\cdot f'(a+h-t)\Big]_0^h + \int_0^h t\cdot f''(a+h-t)\,dt$$

$$\text{oder } f(a+h)-f(a)-f'(a)\,h = \int_0^h t f''(a+h-t)\,dt \text{ oder}$$

$$f(a+h)-f(a)-f'(a)\,h = \Big[\frac{t^2}{2}f''(a+h-t)\Big]_0^h + \int_0^h \frac{t^2}{2} f'''(a+h-t)\,dt$$

oder

$$f(a+h)-f(a)-f'(a)\,h-f''(a)\frac{h^2}{2} = \int_0^h \frac{t^2}{2} f'''(a+h-t)\,dt$$

So fährt man weiter und erhält schließlich, wenn man auf der linken Seite nur $f(a+h)$ behält,

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)\,h+f''(a)\frac{h^2}{2}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+R$$

wo aber

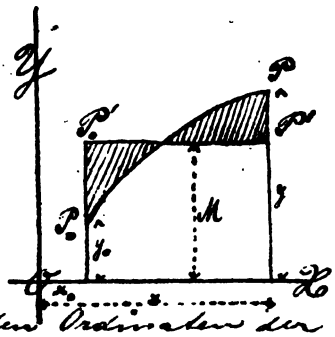
$$R = \int \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+h-t)\,dt$$

als Restformel der Taylor'schen Reihe, ausgedrückt durch ein bestimmtes Integral. Setzen wir

$$x = a+h \quad \text{also} \quad h = x-a\,,$$

so erhalten wir die Maclaurin'sche Reihe:

begrenzten Flächenstückes $M_0 M P P_0$ ist gleich einem Rechtecke über der nämlichen Basis, dessen Höhe einen Werth hat, der zwischen den das Flächenstück seitlich begrenzenden Ordinaten der Kurve y_0 und y liegt.



Allgemeinere Gestalt des Mittelwerthsatzes:

$$b)\quad \int_{x_0}^{x} f(\xi)\cdot g(\xi)\,d\xi = M\cdot\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi \qquad \text{wo}$$

$$M = f\{x_0 + \vartheta(x - x_0)\}$$

wo $g(\xi)$ zwischen $g(x)$ und $g(x_0)$ das Vorzeichen nicht ändern darf.

Integrationsmethoden.

a) Unmittelbare Methode der Integration.

$$\int_{x_0}^{x} f'(\xi)\,d\xi = f(x) - f(x_0)$$

d.h. will man ein bestimmtes Integral

Analytische Anwendung

der Lehre von den bestimmten Integralen.

Reihenentwicklung: Es ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

Setzen wir $-\xi$ an Stelle von x, so erhalten wir:

$$\frac{1}{1+\xi} = 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + - \cdots + (-1)^{n-1}\xi^{n-1} + (-1)^n \frac{\xi^n}{1+\xi}$$

Durch Integration zwischen 0 und x finden wir:

$$l\{1+x\} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n R$$

eine Reihe, welche convergent ist für alle Werthe zwischen -1 und $+1$; es ist

$$R = \int_0^x \frac{1}{1+\xi}\,\xi^n\,d\xi$$ wenn

durch Anwendung des Mittelwerthsatzes:

$$R = \frac{1}{1+\Theta x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

als Restformel der logarithmischen Reihe

Integralen läßt sich die Taylor'sche Reihe entwickeln: gegeben ist

$$f(a+h-t)$$

wo t die Variable. Es ist dann

$$\frac{df(a+h-t)}{dt} = -f'(a+h-t)$$

Integriert zwischen 0 und h gibt:

$$\Big[f(a+h-t)\Big]_0^h = -\int_0^h f'(a+h-t)\,dt \quad \text{oder}$$

$$f(a+h)-f(a) = \Big[t\cdot f'(a+h-t)\Big]_0^h + \int_0^h t\cdot f''(a+h-t)\,dt$$

$$\text{oder } f(a+h)-f(a)-f'(a)h = \int_0^h t f''(a+h-t)\,dt \text{ oder}$$

$$f(a+h)-f(a)-f'(a)h = \Big[\frac{t^2}{2}f''(a+h-t)\Big]_0^h + \int_0^h \frac{t^2}{2} f'''(a+h-t)\,dt$$

$$\text{oder } f(a+h)-f(a)-f'(a)h-f''(a)\frac{h^2}{2} = \int_0^h \frac{t^2}{2} f'''(a+h-t)\,dt$$

So fährt man weiter und erhält schließlich, wenn man auf der linken Seite nur $f(a+h)$ behält,

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+R$$

wo aber

$$R = \int \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+h-t)\,dt$$

als Restformel der Taylor'schen Reihe, ausgedrückt durch ein bestimmtes Integral. Setzen wir

$$x = a+h \quad \text{also} \quad h = x-a \;,$$

so erhalten wir die Maclaurin'sche Reihe:

Entwicklung des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ in ein Produkt:

1) n ist gerade:

35 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2) n ist eine ungerade Zahl:

36 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

daraus kann abgeleitet werden

37 $$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

wenn $$\varepsilon = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots}$$

Bestimmung des Integrals K:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} =$$

38 $$= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 \frac{\pi}{2} + \ldots$$

wo $$k < 1$$

Anwendung auf die Physik:

Schwingungsdauer eines einfachen Pendels.

$$t = 2K\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 9$$

wo g die Erdbeschleunigung und l die Länge des Pendels. Die in K vorkommende Konstante κ ist

$$\kappa = \sin\frac{\alpha}{2}$$

wo α der Ausschlagswinkel.

Arithmetisch-geometrisches Mittel.

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad 10$$

das geometrische

$$b_1 = \sqrt{a.b} \qquad 11$$

daraus folgt:

1. Satz: $a_1^2 - b_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$ 12

2. Satz: Das arithmetische Mittel aus zwei positiven Größen ist immer kleiner als das geometrische. 13

3. Satz: $a_1 - b_1 < \frac{a-b}{2}$, 14

also auch, wenn a_2 und b_2 resp. das arithmetische und geometrische Mittel von a_1 und b_1 bedeuten, a_3 und b_3 die resp. M. von a_2 und b_2 usw. . . . bis a_n und b_n.

$$a_1 - b_1 < \frac{a_1 - b_1}{2} < \frac{a-b}{2}$$
$$a_2 - b_2 < \frac{a_2 - b_2}{2} < \frac{a-b}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - b_n < \frac{a-b}{2^n} \qquad \text{aber}$$

$$\lim_{n=\infty}(a_n - b_n) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$M(a,b) = \lim_{n=\infty}(a_n) = \lim_{n=\infty}(b_n)$$

welch letzterer Ausdruck das arithmetisch geometrische Mittel der Größen a und b genannt wird.

4. Satz: $M(ca, cb) = cM(a,b)$ (5)

5. Satz: $M(a,b) = M(a_1, b_1) = M(a_2, b_2) = \cdots$ (6)

Aus diesen beiden Sätzen folgt:

$$M(a,b) = \frac{a+b}{2} M\{(1+K),(1-K)\}$$

wo $$K = \frac{a-b}{a+b}$$

so dass $1+K = \frac{2a}{a+b}$ & $1-K = \frac{2b}{a+b}$

$$M(a,b) = \frac{a+b}{2} M\{1, \sqrt{1-K^2}\}$$

Zur Berechnung von $M(a,b)$ muss also ausgegangen werden

6. Satz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a_1^2\cos^2\vartheta + b_1^2\sin^2\vartheta}} = \cdots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\vartheta + b_n^2\sin^2\vartheta}} \quad 4$$

d.h.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{M(a,b)} \quad 5$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta}} = \frac{\pi}{2M(a,b)} \quad 7$$

So ist also auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta + (1-k^2)\sin^2\vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = K = \frac{\pi}{2M(1,\sqrt{1-k^2})}$$

Es ist nun aber

$$M(1,\sqrt{1-k^2}) = \frac{2}{a+b}\,M(a,b)$$

also:

7. Satz:

$$M(a,b) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{a+b}{K} \quad 10$$

wo also die in K vorkommende Größe k den Werth $\frac{a-b}{a+b}$ hat.

Weitere Anwendungen der bestimmten Integrale auf die Analysis.

Fouriersche Reihen; Es ist:

51 $$\int_0^{\pi} \cos(ax)\,dx = \left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_0^{\pi} = 0$$

wenn a eine ganze Zahl ist.

Ist hingegen $a = 0$, so hat das Integral den Werth π.

Es ist das Integral:

52 $$\int_0^{\pi} \sin(ax)\,dx = \left[-\frac{\cos(ax)}{a}\right]_0^{\pi}$$

gleich Null, wenn a eine gerade Zahl ist (also auch für $a=0$)

gleich $\frac{2}{a}$, wenn a eine ungerade ganze Zahl ist.

Das Integral:

53 $$\int_0^{\pi} \cos(rx)\cos(sx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(r+s)x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(r-s)x\,dx$$

ist gleich π wenn $r = s = 0$

" $\frac{\pi}{2}$ " $r = s > 0$

" 0 " $0 < r \gtrless s > 0$

Das Integral:

54 $$\int_0^{\pi} \sin(rx)\sin(sx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(r-s)x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(r+s)x\,dx$$

ist gleich 0 wenn $r = s = 0$

" $\frac{\pi}{2}$ " $r = s > 0$

" 0 " $0 < r \gtrless s > 0$

Diese Integrale dienen zur Entwicklung einer Funktion in eine Reihe von folgender Form (: Fourier'sche Reihen :) :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + \ldots \qquad 55$$

wo $a_0, a_1, a_2 \ldots$ Constanten sind. Um beliebige unter ihnen, z.B. a_n, wird gefunden, indem man mit $\cos(nx)$ die beiden Seiten der Gleichung multipliziert und dann integrirt:

$$\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = a_0\int_0^\pi \cos(nx)\,dx + a_1\int_0^\pi \cos(nx)\cos x\,dx + a_2\int_0^\pi \cos(nx)\cos(2x)\,dx + \ldots$$

Es verschwinden dann bis auf das mit dem Coefficienten a_n, welches lautet:

$$a_n \int_0^\pi \cos(nx)\cos(nx)\,dx = a_n \frac{\pi}{2}$$

so dass also

$$\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = a_n \frac{\pi}{2}$$

also dann

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx \qquad 56$$

Analog gestaltet sich die Entwicklung einer Funktion in eine zweite Fourrier'sche Reihe:

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \cdots$$

wo wieder

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Lejeune-Dirichelet hat bewiesen, dass sich jede Funktion in eine solche Reihe entwickeln lasse.

Entwickeln wir

$$f(x) = 1$$

so erhalten wir

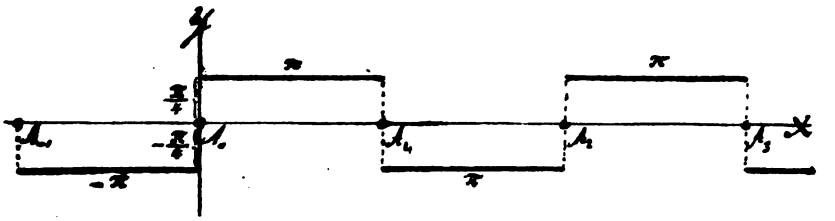
$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \cdots$$

eine Reihe, welche gültig ist für alle Werthe von x zwischen 0 und π.

Die Gleichung

$$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \cdots$$

stellt uns demgemäß folgende eigenthümliche aus Parallelen zur x-Axe und Punkten derselben $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ bestehende mustehige Kurve dar:



Entwickeln wir $f(x) = x$ nach der zweiten Fourier'schen Reihe, so erhalten wir:

$$\frac{\pi}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + - \cdots, \qquad 60$$

eine convergente Reihe für alle Werthe von x zwischen 0 und π (0 in begriffen; nicht aber π),

und

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \cdots \qquad 61$$

eine convergente Reihe für x zwischen 0 und π (π in begriffen, nicht aber 0 :)

Dieselbe Function, nämlich $f(x) = x$, nach der ersten F'schen Reihe entwickelt gibt

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}x = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \cdots \qquad 62$$

also für $x = 0$:) ist

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \qquad 63$$

Durch weitere Integration der obigen Reihen

innerhalb den Grenzen 0 und π erhalten wir weitere Reihen. (: Bernoulli'sche Funktionen:)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Das unbestimmte Integral hievon ist gänzlich unbekannt.

$$\Pi(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$$

$$\frac{1}{\Pi(x)}\,e^{cx} = (1+x)\,e^{-x}\cdot\left(1+\tfrac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\tfrac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\cdots$$

wo $$c = 0{,}57721566490\,1$$

$$c = \lim_{n=\infty}\left[1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}-l(n)\right]$$

Das Produkt der unendlich vielen Werthe für $\frac{1}{\Pi(x)}\,e^{cx}$ ist convergent für alle Werthe von x.

II. Teil.

Anwendungen

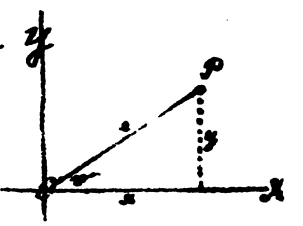
der Differenzial- und Integralrechnung

auf die Geometrie

Formeln

aus der analytischen Geometrie d. Ebene

Sind x und y die Coordinaten eines Punktes P, so ist seine Entfernung vom Anfangspunkt O



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad 1$$

und der Neigungswinkel des Radius vektor vom Null-Punkte aus mit der positiven x-Achse wird bestimmt durch

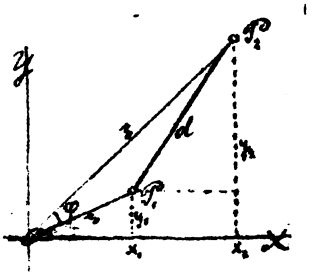
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \qquad 2$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \qquad \cos \varphi = \frac{x}{r} \qquad 3$$

so dass also

$$y = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad x = r \cos \varphi \qquad 3a$$

Sind zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ gegeben, so ist ihre Entfernung



8 $$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

und für den Winkel φ ihrer Radien vectoren haben wir

6 $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

Ist $\operatorname{tg}\varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, d.h.

1 $$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0 \quad ,$$

so liegen die beiden Punkte in einer Geraden durch den Null-Punkt.
Ist hingegen $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d.h.

1 $$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \quad ,$$

so werden die beiden Punkte vom Null-Punkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.
Der Inhalt des Dreieckes $0 P_1 P_2$ ist:

3 $$J = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{2}$$

Ist J gleich Null, so liegen die beiden Punkte

te auf einer Geraden durch den Null-Punkt.

Für den <u>Flächeninhalt des n-Ecks</u> haben wir die Formel:

$$2J = (x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + \cdots + (x_n y_1 - y_n x_1) \qquad 10$$

wo $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $\ldots$ $x_n y_n$ die Coordinaten der n Eckpunkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ des Polygons sind.

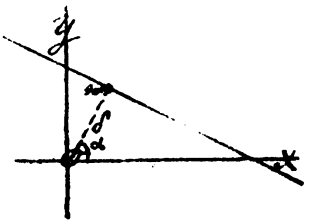
<u>Die Gleichung der Geraden durch zwei Punkte</u> $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ lautet:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \text{oder} \qquad 11$$

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0 \qquad 11'$$

<u>Gleichung der Geraden auf der Normalform:</u>

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0 \qquad 12$$



wo δ die Länge der vom Nullpunkt auf die Gerade gefällten Normalen und α der Winkel dieser letzteren mit der positiven x-Axe.

Allgemeine Gleichung der Geraden:

$$ax + by + c = 0$$

Sie wird durch Division mit

$$\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

auf die Normalform gebracht:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

Abstand eines Punktes $P_0(x_0, y_0)$ von einer Geraden:

$$\delta_0 = -\{x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - \delta\}$$

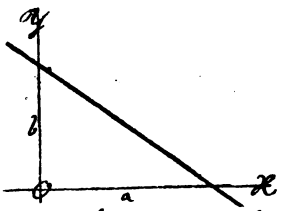
d.h. um den Abstand eines Punktes von einer Geraden zu finden, setzt man in der linken Seite der Normalgleichung der Geraden an Stelle der Variablen die Coordinaten des gegebenen Punktes und gibt dem ganzen Ausdruck das negative Vorzeichen. Liegt der Coordinatenanfangspunkt 0 gegenüber Punkt auf derselben Seite der gegebenen Geraden, so nennen wir den Abstand positiv, liegen sie auf verschiedenen Seiten derselben,

so nennen wir ihn negativ:)

Die Gleichung der Geraden erscheint häufig auch in der Form:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad 16$$

wo a und b die Abschnitte der Geraden auf der x=& y=Axe.



Jede Gleichung ersten Grades, zwischen x & y, die kein constantes Glied enthält, bedeutet eine durch den Nullpunkt gehende Gerade.

Gleichung einer Geraden durch einen Punkt:

$$y - y' = m(x - x') \qquad 17$$

wo x' und y' die Coordinaten des Punktes,

durch zwei Punkte: $P'(x'y')$ und $P''(x''y'')$:

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y''-y'}{x''-x'} \qquad 18$$

Bedingung, dass drei Punkte P_1, P_2, P_3 mit den respektiven Coordinaten:

$x_1 y_1$ $x_2 y_2$ $x_3 y_3$

auf einer und derselben Geraden liegen:

19
$$\begin{vmatrix} (x_1 - x_3) & (x_2 - x_3) \\ (y_1 - y_3) & (y_2 - y_3) \end{vmatrix} = 0$$

oder

20
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Zwei Gerade:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Für den von ihnen eingeschlossenen Winkel haben wir:

21
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$$

Daraus folgt für den Parallelismus der Geraden:

22
$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$$

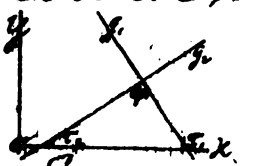
und als Bedingung des Normalseins derselben, wo aber $\varphi = \frac{\pi}{2}$, aber $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, haben wir

23
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

Zwei Gerade stehen aufeinander senkrecht, wenn das Produkt der Tangen-

ten ihrer Winkel mit der positiven x-Achse gleich der negativen Einheit ist; d.h.

$$\operatorname{tg}\tau_1 \cdot \operatorname{tg}\tau_2 = -1$$



Der Neigungswinkel einer Geraden

$$ax + by + c = 0 \quad \text{ist}$$

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{b}{a}$$

also lautet obige Bedingungsgleichung des Normalseins zweier Geraden:

$$\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)\cdot\left(-\frac{b_2}{a_2}\right) = -1$$

welche mit der ersten Relation identisch ist.

Lauten die Gleichungen zweier Geraden abgekürzt:

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 0$$

so lautet die Gleichung irgendeiner Geraden durch ihren Schnittpunkt

$$g_1 + \lambda g_2 = 0$$

Durch Fixierung von λ wird auch die betreffende Gerade eindeutig bestimmt.

Die Bedingung, dass drei Gerade

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

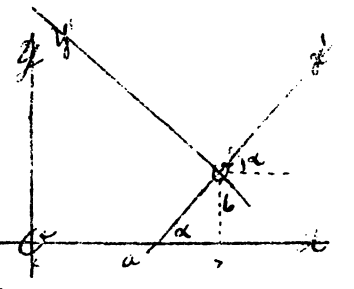
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

durch einen und denselben Punkt gehen

ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Lineare Transformation:



Bedeuten x, y die Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche System und x', y' diejenigen in Bezug auf das neue System, und bedeutet ferner α den Winkel, den die neue x-Axe mit der positiven Richtung der ursprünglichen einschließt, so haben wir folgende Transformationsformeln für die Transformation vom alten ins neue System:

$$x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

I)

$$y = b + y' \cos\alpha + x' \sin\alpha$$

und für die umgekehrte T. haben wir:

$$x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha$$

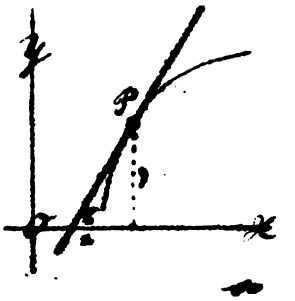
II)

$$y' = (y-b)\cos\alpha - (x-a)\sin\alpha$$

Tangenten und Normalen ebener Kurven

A. Tangenten:

Ist die Gleichung einer Kurve gegeben durch



$$y = f(x)$$

ist $$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = p = \operatorname{tg}\tau$$

und

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{u.} \quad \sin\tau = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

wo τ der Winkel, den die Tangente des Punktes $P(x,y)$ mit der positiven x-Achse bildet.

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P(x,y)$ lautet:

$$(\eta - y) = p(\xi - x)$$

wo ξ und η die laufenden Coordinaten der selben.

Ist die Gleichung der Kurve gegeben durch:

$$f(x,y) = 0$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \operatorname{tg}\tau$$

$$\sin\tau = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \cos\tau = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

und die Gleichung der Tangente lautet:

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ist endlich die Gleichung der Kurve gegeben durch:

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \psi(t)$$

so haben wir für die Winkel der Tangente mit der x-Axe:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\sin\tau = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \quad \cos\tau = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

und für ihre Gleichung:

$$(\xi - x)\frac{dy}{dt} - (\eta - y)\frac{dx}{dt} = 0$$

Beispiele:

1) Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Gleichung der Tangente im Punkte $P(x,y)$:

$$x\xi + y\eta = r^2$$

2) Gleichung der Parabel (für den Kreisel als Anfangspunkt):

$$y^2 = 2px$$

Tangenten Gleichung:

$$y\eta = p(x + \xi)$$

Die Axenabschnitte der Tangente eines Parabelpunktes von den Coordinaten x, y sind $= x$ und $\frac{y}{2}$

Der Fußpunkt des vom Brennpunkt der Parabel auf die Tangente gefällten Lothes befindet sich stets auf der Leitlinie derselben.

3) Gleichung der Ellipse (+) und der Hyperbel (−)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder}$$

$$x = a\cos u \qquad \text{und} \qquad y = a\sin u$$

wo u die excentrische Anomalie.

Tangentengleichung:

$$\frac{x\xi}{a^2} \pm \frac{y\eta}{b^2} = 1$$

α) Gleichung der Cykloide:

$$x = l\cdot(\varphi - \sin\varphi) \qquad y = l\cdot(1-\cos\varphi),$$

wo φ der Wälzungswinkel und l der Radius des Rollkreises.

Die Tangente in jedem Punkte der Cykloide ist parallel der Rollkreissehne des Wälzungswinkels.

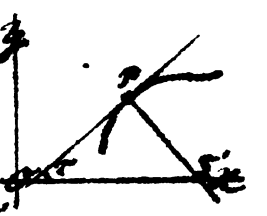
β) Die allgemeine Tangentengleichung einer Kurve zweiten Grades, deren Gleichung gegeben ist in der allgemeinen Form:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$

lautet:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})\xi + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})\eta + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0$$

B. Normalen:



Ist τ die Richtung der Tangente im Punkte $P_{(x,y)}$, so bestehen für die Richtung τ' der Normalen die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\tau' = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = -\frac{1}{p}$$

$$\cos\tau' = -\sin\tau = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad ; \quad \sin\tau' = \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

Lautet die Gleichung der Kurve

$$y = f(x)$$

so lautet die Gleichung der Normalen in P_{xy}

$$(\xi - x) + p(\eta - y) = 0 \quad ;$$

lautet jene:

$$f(x, y) = 0$$

so lautet diese:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad ,$$

lautet sie endlich:

$$x = \varphi(t) \quad \text{und} \quad y = \psi(t)$$

so lautet die Normalengleichung:

$$(\xi - x)\frac{dx}{dt} + (\eta - y)\frac{dy}{dt} = 0$$

Beispiele.

Für jeden Punkte der Cykloide, der Hypocykloide, der Epicykloide, wie überhaupt aller Rollkurven, gehen die Normalen durch den augenblicklichen Berührungspunkt des Rollkreises mit der festen Geraden, resp. Kreis, Kurve.

Gleichung der Epicykloide

$$\frac{x}{m} = (n+1)\cos\{nu\} - n\cos\{(n+1)u\}$$

$$\frac{y}{m} = (n+1)\sin\{nu\} - n\sin\{(n+1)u\}$$

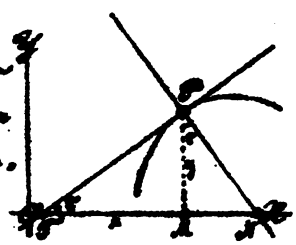
Gleichung der Hypocycloide:

$$\frac{x}{m} = n\cos\{(n-1)u\} - (n-1)\cos\{nu\}$$

$$\frac{y}{m} = n\sin\{(n-1)u\} - (n-1)\sin\{nu\}$$

wo n das Verhältniss des Radius des Deferenten zu dem des Rollkreises (Epicycel und Hypocycel), m der Radius des Deferenten und l den des Rollkreises und u der Wälzungswinkel ist.

Ist uns die Gleichung einer Kurve gegeben, so haben wir in irgend einem Punkt $P_{(x,y)}$ derselben für die:



Länge der Tangente: $PT = y\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}$

" " " Normalen: $PN = y\sqrt{1+p^2}$

" " " Subtangente: $MT = \frac{y}{p}$

" " " Subnormalen: $MN = yp$

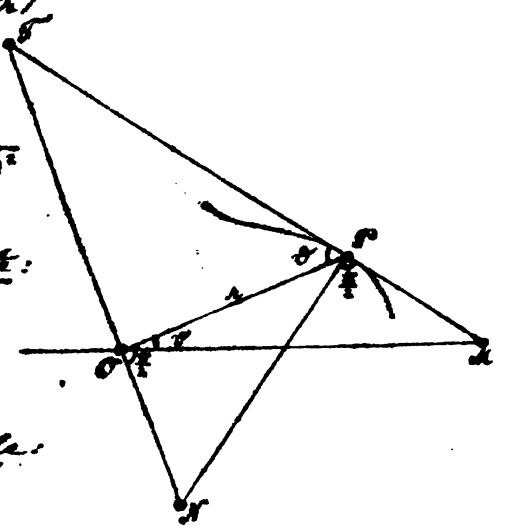
Beispiele:

1) Die Subnormale der Parabel ist constant und zwar gleich dem halben Parameter $\frac{a}{2}$.

2) Die Subtangente der Parabel ist zweimal so groß als die Abscisse des Berüh-

Polartangente:

9 $PT = r\sqrt{1+\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$



Polarnormale:

10 $PN = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$

Polarsubtangente:

11 $OT = r^2\frac{d\varphi}{dr}$

Polarsubnormale:

12 $ON = \frac{dr}{d\varphi}$

Beispiele:

1) Gleichung der Archimedischen Spirale:

13 $r = a\varphi$

Die Subnormale dieser Kurve ist constant.

2) Gleichung der hyperbolischen Spirale:

14 $r = \frac{a}{\varphi}$

Die Subtangente derselben ist constant.

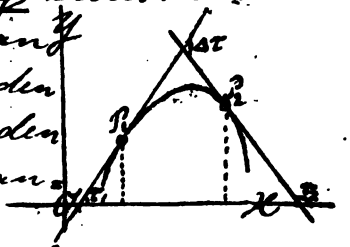
3) Gleichung der logarithmischen Spirale:

15 $r = ac^{\varphi}$

Der Winkel zwischen Radius vector und Tangente der log. Spirale ist constant.

Krümmung ebener Kurven.

Krümmungsradius & Mittelpunkt. Unter totaler Krümmung eines Kurvenbogens P_1P_2 versteht man den Winkel $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$, den die beiden Tangenten in den Punkten P_1 und P_2 mit einander einschließen.



Dividirt man die totale Krümmung durch die Länge des Bogens Δs, so erhält man die mittlere Krümmung:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$$

und unter der Krümmung der Kurve (im engern Sinne) im Punkte P_1 versteht man die Grenze

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad (4)$$

der sich der Ausdruck $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ nähert, wenn wir Δs unendlich klein werden d. h. P_2 unendlich nahe an P_1 heranrücken lassen.

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} \qquad (4')$$

bedeutet den Krümmungsradius der Kurve im Punkte P_1, d. h. den Radius desjenigen Kreises, welcher mit der Kurve im Punkte P_1 gleiche Krümmung hat. $\frac{d\tau}{ds}$ ist der reciproke Werth dieses Radius. Die Krümmung ist dem

Krümmungsradius umgekehrt proportional.

Ist die Gleichung einer Kurve gegeben durch

1) $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$,

so erhalten wir für den Krümmungsradius im Punkte P von den Coordinaten x und y folgende Werthe:

$$\rho = \frac{(ds)^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$\rho = \frac{(ds)^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}$$

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

wo $$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Ist die Gleichung der Kurve gegeben durch $f(x,y) = 0$,

so erhalten wir, wenn wir folgende abkürzende Bezeichnungen einführen:

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$; $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{12} = f_{21}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

für den Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\Theta} \quad \text{oder} \quad 79$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_1}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}\right) \quad 80$$

Ist endlich die Kurvengleichung gegeben durch $y = f(x)$

und bezeichnen wir

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad 81$$

so erhalten wir:

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \quad 82$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} \quad 83$$

Sind zwei Kurven gegeben von den Gleichungen:

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x)$$

so sagen wir, die Kurven schneiden sich in dem Punkte, dessen Abscisse $= a$ ist, d. h. sie haben hier einen Punkt miteinander gemein, wenn

$$f(a) = g(a)$$

Sie berühren sich in diesem Punkte $x$ter ersten Ordnung, d. h. sie haben zwei unendlich nahe Punkte, (also auch dieselbe Tangente) miteinander

gemein, wenn auch noch

$$f'(a) = g'(a)$$

ist ferner auch noch

$$f''(a) = g''(a)$$

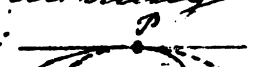
so berühren sich in diesem Punkte die Kurven zur zweiten Ordnung, d.h. sie haben drei unendlich nahe Punkte mit einander gemein.

Ist endlich

$$f'''(a) = g'''(a)$$
$$f^{IV}(a) = g^{IV}(a)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$$
$$f^{(n+1)}(a) \lesseqgtr g^{(n+1)}(a)$$ aber

so haben wir im Punkte von der Abscisse a eine Berührung der beiden Kurven von n^{ter} Ordnung, d.h. dieselben haben $n+1$ unendlich nahe Punkte mit einander gemein.

Die Berührung gerader Ordnung unterscheidet sich von der Berührung ungerader Ordnung: bei

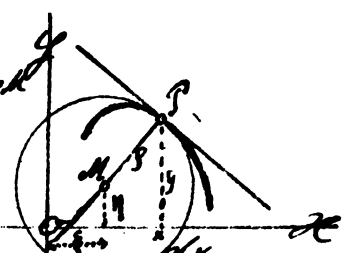


der ersteren durchsetzen sich die beiden Kurven, während

bei der letzteren dieß nicht der Fall ist: das eine Kurvenstück ist in der Umgebung des Berührungspunktes ganz außerhalb oder ganz innerhalb des andern Bogens.

Legen wir durch drei aufeinander folgende nahe Punkte einer Kurve einen Kreis (welcher ja durch drei Punkte vollständig bestimmt ist, auch wenn sie unendlich nahe beieinander sind), so berührt dieser die Kurve zur zweiten Ordnung, (durchsetzt sie also) und heißt Osculationskreis oder Schmiegungskreis der Kurve in P. Derselbe hat die nämliche Krümmung wie die Kurve im Punkte P und heißt daher auch Krümmungskreis der Kurve im Punkte P, und sein Radius ist also der Krümmungsradius der Kurve für jenen Punkt. Sein Mittelpunkt heißt Krümmungscentrum des Punktes P und liegt natürlich auf der Normalen der Kurve durch P.

Für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes M eines gegebenen Punktes $P_{(x,y)}$ haben wir



$$\xi = x - \frac{dy}{d\tau} \; ; \quad \eta = y + \frac{dx}{d\tau} \qquad 84$$

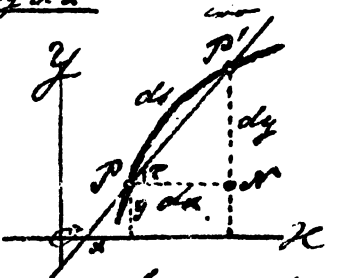
und für den Krümmungsradius

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} \qquad 85$$

wo der Contingenzwinkel:

86 $$d\tau = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(ds)^2}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



(ds. dem charakteristischen Dreiecke $PP'N$).

Ist die Gleichung der Kurve gegeben durch

1) $$x = \varphi(t) \quad \text{u} \quad y = \psi(t)$$

so haben wir für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt $P_{(x,y)}$:

89 $$\xi = x - \frac{dy\,[(dx)^2 + (dy)^2]}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$\eta = y + \frac{dx\,[(dx)^2 + (dy)^2]}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Ist die Gleichung der Kurve gegeben

2) durch $$f(x,y) = 0$$

so haben wir:

88 $$\xi = x - \frac{f_1(f_1^2 + f_2^2)}{\mathfrak{D}} \quad ; \quad \eta = y + \frac{f_2(f_1^2 + f_2^2)}{\mathfrak{D}} ,$$

wo $\mathfrak{D}$ den oben angegebenen Werth hat (88).

Ist endlich die Gleichung gegeben durch

3) $$y = f(x)$$

so ist

89 $$\xi = x - p\frac{1 + p^2}{q} \quad ; \quad \eta = y + \frac{1 + p^2}{q}$$

Evolvente und Evolute. Construiren wir zu jedem Punkte einer gegebenen Kurve den Krümmungsmittelpunkt, so erhalten wir eine neue Kurve, welche in Bezug auf die erstere Kurve — die Evolvente — Evolute genannt wird. Die Gleichung der Evolute wird gefunden durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen:

$$y = f(x)$$

$$\xi = x - p\frac{1+p^2}{q}, \qquad \eta = y + \frac{1+p^2}{q}$$

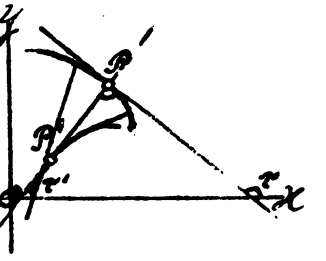
d.h. aus der Gleichung der Evolvente und den Ausdrücken, welche die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes allgemein darstellen.

Sätze über Evolvente und Evolute:

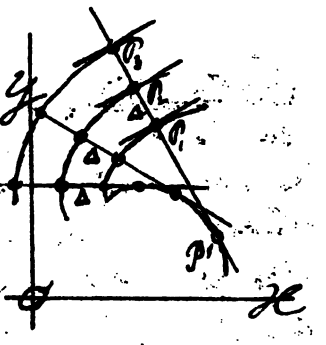
1)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p} = -\frac{dx}{dy}$$

d.h. Die Tangente eines Punktes der Evolute ist die Normale der Evolvente in correspondirenden Punkten, woraus folgt: dass die Normalen der Evolvente die Evolute umhüllen.

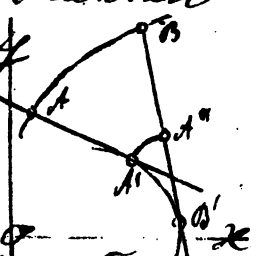


2) Zu einer Evolvente gehört nur eine Evolute, hingegen kann dieselbe Kurve unzähligen andern als Evol-



venten Evolute sein. Die zugehörigen Evolventen heißen Parallelkurven, weil die Tangenten entsprechender Punkte (d.s. Punkte desselben Krümmungsmittelpunktes) parallel sind, oder man nennt sie auch äquidistante Kurven, weil die correspondirenden Punkte je zweier Evolventen alle denselben Abstand von einander haben.

3.) Der Bogen zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich der Differenz der Krümmungsradien der Evolvente; z.B. es ist in nebenstehender Figur:



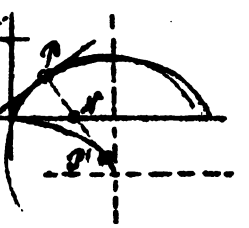
$$A'B' = BB' - AA'$$

Wird also ein unausdehnbarer Faden in einem Punkte B einer Kurve als Evolute festgehalten und dann auf dieselbe aufgewickelt, so daß er stets gespannt bleibt, so beschreiben alle seine Punkte Parallelkurven, welche Evolventen jener gegebenen festen Evolute sind.

Beispiele:

1) Cykloide. Krümmungsradius:

$$\varrho = 4l \sin\left(\frac{u}{2}\right) = 2N \qquad 90$$



d.h. derselbe ist doppelt so lang als die Normale.

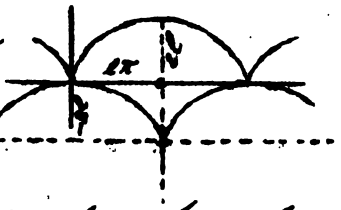
Gleichung der Cykloide:

$$x = l(u - \sin u) \; ; \quad y = l(1 - \cos u) \qquad 91$$

Gleichung der Evolute:

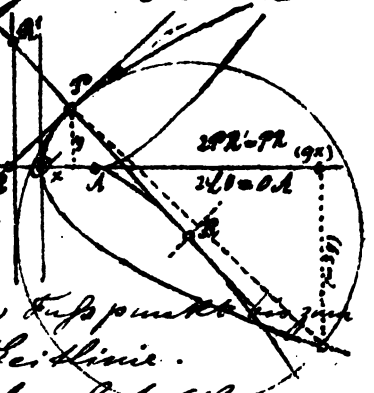
$$\xi = l(u + \sin u) \; ; \quad \eta = -l(1 - \cos u) \qquad 92$$

d.h. die Evolute der Cykloide ist wieder eine Cykloide, welche zur gegebenen congruent und bloß in Bezug auf die um $l\pi$ und $-l$ nach den Richtungen der Achsen verschoben ist.



2) Parabel. Es ist

$$\varrho = \frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}} \qquad 93$$



Der Krümmungsradius der Parabel ist zweimal so lang als das Stück der Normalen von ihrem Fußpunkte bis zum Schnittpunkt mit der Leitlinie.

Gleichung der Parabelevolute (s. Semicubische Parabel):

$$\xi = 3x + a \qquad \eta = -\frac{y^3}{a^2}$$

oder

$$\eta^2 = \frac{8}{27} \frac{(\xi - a)^3}{a} \qquad 94$$

Da Kreis und Parabel beides Kurven zweiten Grades sind, so schneiden sie sich außer in dem für drei Punkte zählenden Oscilationspunkt noch in einem vierten Punkte, dessen Coordinaten sind q^2 und $-2q$, was eine sehr einfache Construction für Krümmungskreis und Mittelpunkt ergiebt. (Für den Scheitel fällt dieser vierte Schnittpunkt des Krümmungskreises mit der Parabel auch noch in den Scheitel und in Folge dieser zweipunktigen Berührung berühren sich hier Krümmungskreis und Kurve nicht mehr: Analog bei den Scheiteln der Ellipse und Hyperbel.)

Ellipse:

$$S = \frac{N^3}{p^2}$$

wo

$$N = \frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}{c}$$

die Länge der Normalen und wo ferner

$$p = \frac{b^2}{a}$$

den halben Parameter bedeutet.

(Analog bei der Hyperbel.)

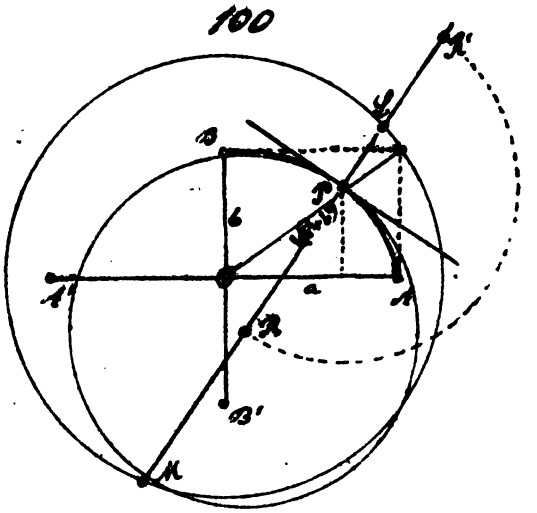
Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gleichung ihrer Evolute (Astroide):

$$\xi = \frac{x^3c^2}{a^4} \quad \text{Da} \quad \eta = -\frac{y^3c^2}{b^4}$$

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$



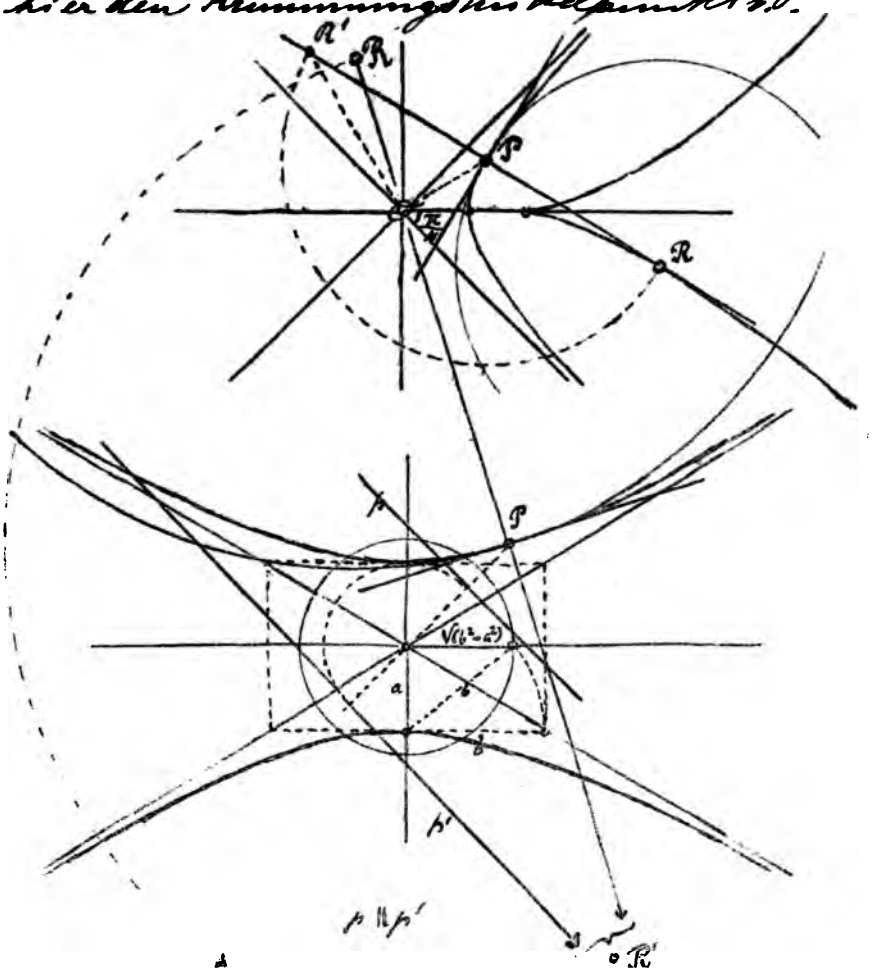
Construktion des Krümmungsmittelpunktes eines Hyperbelpunktes.

Bei der spitzwinkligen verfährt man ganz analog; nur dass der Kreis um den Mittelpunkt mit dem Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$ beschrieben wird, welcher Ausdruck in diesem Falle, wo $a > b$ ist eine reelle Grösse ist.

Bei der gleichseitigen Hyperbel, wo genannter Ausdruck gleich Null ist, ist der Krümmungsradius gleich der Polarnormalen.

Bei der stumpfwinkligen Hyperbel, wo $a < b$ ist, also $\sqrt{a^2 - b^2}$ imaginär wird, bestimmt man den Krümmungsmittelpunkt von P folgender massen: man construirt die Polare dieses Punktes P in Bezug auf den mit dem Radius $\sqrt{b^2 - a^2}$ um den Mittelpunkt

beschriebenen Kreis und bringt die zu die-
ser Polaren parallele und zu ihr fünfte
Mittelpunkt-symmetrische Gerade zum
Schnitt mit der Normalen der Hyper-
bel im Punkte P, der Abstand dieses
Punktes von jenem Schnittpunkt auf
der Normalen vom P aus nach der
andern Seite hin abgetragen liefert
hier den Krümmungsmittelpunkt v. P.



Wir können die Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte auch noch anders bestimmen; es kommen dabei zur Anwendung folgende Sätze:

Sind P_1 P_2 P_3 P_4 der Reihe nach die vier Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitt, so sind die Gegenseiten des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ gegen die Axen symmetrisch geneigt; woraus folgt, dass die Tangente eines Punktes eines Kegelschnittes und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem vierten Schnittpunkt des Krümmungskreises von P mit dem Kegelschnitt gegen die Axen symmetrisch geneigt sind.

Bei der Parabel ist wie bekannt dieser vierte Schnittpunkt noch auf eine andere Art leicht aus den Coordinaten des gegebenen Punktes zu bestimmen.

Für die Ellipse ergibt sich eine weitere Construktion des vierten Schnittpunktes aus dem folgenden Satze:

Die Summe der excentrischen Anomalien der vier Schnittpunkte eines Kreises mit der Ellipse ist stets ein ganzes Vielfaches von 2π

Ist der Kreis also Krümmungskreis der Ellipse im Punkte P, dessen ex-

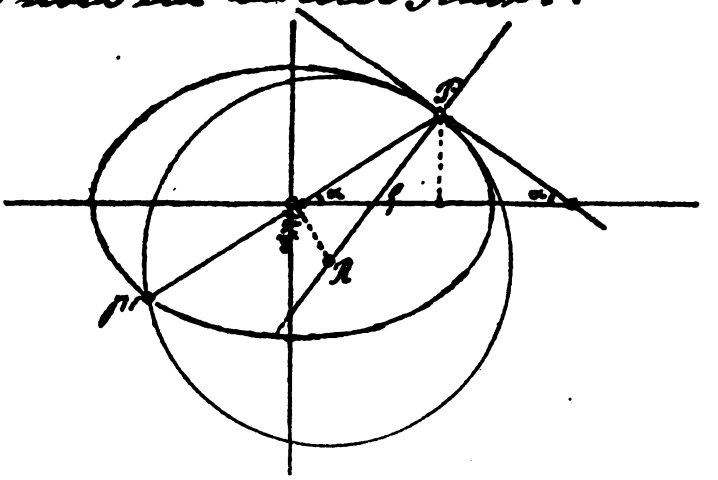
centrische Anomalie u ist, und ist u_1 die excentrische Anomalie des vierten Schnittpunktes von Kreis und Ellipse, so haben wir lt. obigem Satze

$$3u + u_1 = 2k\pi \quad , \qquad (18)$$

woraus u_1 also leicht zu bestimmen ist. k ist eine ganze Zahl.

Satz: Durch einen beliebigen Punkt C der Ellipse gehen außer dem Schmiegungskreis von P selbst noch drei weitere Kreise für die Punkte $P_1 P_2 P_3$ und das Viereck $P_1 P_2 P_3 P$ hat die Eigenschaft, daß seine Gegenseiten zu den Achsen symmetrisch geneigt sind.

Ist der vierte Schnittpunkt bestimmt, so ist das ganze Problem zurückgeführt auf die Konstruktion eines Kreises von dem gegeben sind: eine Tangente samt Berührungspunkt und da. zu noch ein weiterer Punkt.



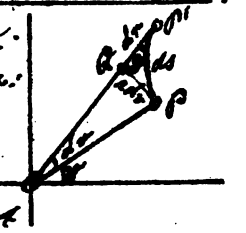
Krümmung der Kurven, welche in Polarcoordinaten gegeben sind.

Sindet die Gleichung der Kurve:

$$r = f(v)$$

und bezeichnen wir

$f'(v) = r'$ & $f''(v) = r''$ so ist



104 $$\frac{ds}{dv} = \sqrt{r'^2 + r^2}$$

105 $$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r}{r'} \; ; \; \cos \vartheta = \frac{dx}{ds} \; ; \; \sin \vartheta = \frac{r\,dv}{ds}$$

und

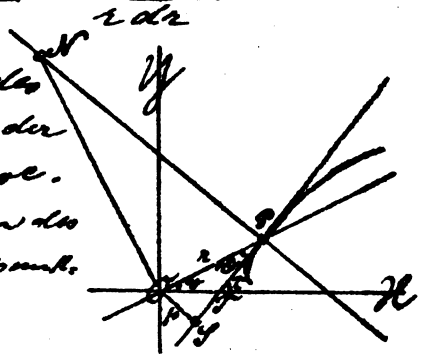
106 $$\rho = \frac{(ds)^3}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

106' oder kurz $$\rho = \frac{r\,dr}{dp}$$ also

107 $$\frac{1}{\rho} = \frac{dp}{r\,dr} = \frac{d\left(\frac{r^2}{ds}\right)}{r\,dr}$$

wo p der Abstand des Nullpunktes von der Tangente der Kurve.

Für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes haben wir:



108 $$\xi = r' \sin v \; , \; \eta = r' \cos v$$

Beispiele:

1) Gleichung der logarithmischen Spirale.

109 $$r = a \cdot c^{\frac{v}{k}}$$

110 $$\rho = r\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

d.h. der Krümmungsradius ist dem Radiusvec.

torproportional.

Die Gleichung der Evolute lautet:

$$f = -\frac{r}{b}\sin v \quad ; \quad g = \frac{r}{b}\cos v \quad ; \qquad 111$$

ist also der Radius vektor der Evolute $R = \frac{r}{b}$ und die Anomalie $V = v + \frac{\pi}{2}$, so lautet die Gleichung auch:

$$R = \frac{a}{b}\, e^{-\frac{v+\frac{\pi}{2}}{b}} \qquad 112$$

d.h. die Evolute der log. Spirale ist wieder eine solche der ursprünglichen congruente Spirale, und das Verhältniss ihrer Radien vektoren für dieselbe Anomalie ist gegeben durch die Proportion:

$$1 : R = b : 1 \qquad 113$$

Drehen wir die Evolute in positivem Sinne um den Winkel

$$\frac{\pi}{2} + b\,l(b) \quad , \qquad 114$$

so fällt sie mit der Evolvente zusammen. Der Krümmungsradius der log. Spirale wird vom Anfangspunkt aus immer unter einem rechten Winkel geschen.

2) Bei Kurven, deren Gleichung die Form haben:

$$\underline{r^m = a\cos(mv)} \quad , \text{ ist} \qquad 115$$

$$\rho = \frac{N}{m+1} \quad , \qquad 116$$

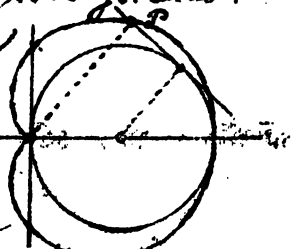
d. h. der Krümmungsradius ist der Polarnormale proportional.

a) Für $n=-2$ haben wir die gleichseitige
113 Hyperbel: $\frac{1}{r^2} = a\cos(2v)$, wo
a die Halbaxe. Bei ihr ist also der
Krümmungsradius gleich der Polarnormalen.
b) Für $n=-\frac{1}{2}$ erhalten wir die Gleichung
114 der Parabel: $\frac{1}{r} = a^2\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)$, wo $a=\sqrt{\frac{2}{p}}$,
(p der Halbparameter) welche, in Rechts-
winkelcoordinaten übertragen, lautet:

115 $$y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - x\right)$$

wo $p=\frac{2}{a^2}$

Der Brennpunkt ist also der Anfangspunkt.
Für diesen Pol ist also der Krümmungs-
radius gleich der doppelten Polarn.
c) Ist $n=+\frac{1}{2}$ erhalten wir die Gl.
der Cardioide oder der Fußpunktskur-
ve des Kreises für einen Peripheriepunkt.
(Die Kurve der Fußpunkte der von einem
Peripheriepunkt des Kreises auf alle seine
Tangenten gefällten Lothe.) Die Gl. lautet:



120 $$r = l(1+\cos v)$$

wo $l=\frac{a^2}{2}$ der Kreisradius.
Der Krümmungsradius ist
gleich $\frac{2}{3}$ der Polarnormalen.
d) Für $n=2$ endlich erhalten
wir die Gleichung der Lemniskate:

121 $$r^2 = a\cos(2v)$$ wo

$$a = a'^2 = 8c^2$$

wo a' die Halbaxe und 2c der Abstand
der Brennpunkte. Für die [illegible]

von y auszurechnen und in obige Formel einzusetzen.

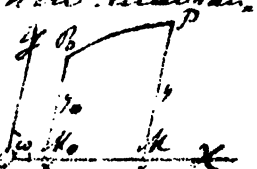
Ist hingegen die Kurven-Gleichung gegeben

durch $x = \varphi(t)$ & $y = \psi(t)$, so ist

123 $$J = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

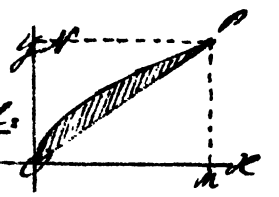
wo t_0 und t die den Werthen x_0 und x entsprechenden Werthe der dritten veränderlichen Variablen t sind.

Haben wir schiefwinklige Coordinaten, so ist der Inhalt eines Flächenstückes PP_0M_0M:



124 $$J = \sin\omega \int_{x_0}^{x} y\,dx$$ resp.

$$J = \sin\omega \cdot \int_{t_0}^{t} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$



Beispiele:

1) Der Flächeninhalt des Parabelsegmentes OPM ist gleich $\frac{2}{3}$ des Rechteckes $OMPN$, d.h.

125 $$J = \frac{2}{3} x y$$

folgl. ist das schraffirte Segment $OP = \frac{1}{3}$ des Rechteckes.

Haben wir schiefwinklige Coordinaten und ist eine Tangente der Parabel die y-Achse,

So ist also der Inhalt der ganzen Ellipse:

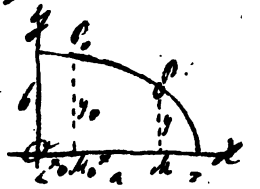
$$J = a\,b\,\pi \cdot \sin(\omega)$$

Beziehen wir hingegen die Ellipse auf die Hauptachsen, so lautet die Inhaltsformel eines analogen Flächenstückes einfach

130 $$J = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x_0}^{x}$$

folglich ist der Inhalt der ganzen

131 Ellipse: $J = a\,b\,\pi$



Daraus folgen die Sätze:

1) Die durch Paare conjugirter Durchmesser ergangten vier Quadranten einer Ellipse sind einander gleich.

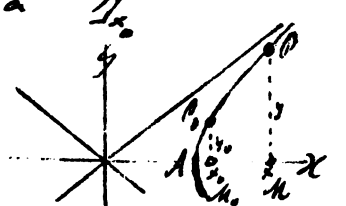
2) Alle einer Ellipse umschriebenen Parallelogramme, deren Seiten Paaren conjugirter Durchmesser parallel sind, haben gleichen Inhalt.

3) Folglich sind auch alle Parallelogramme, deren Diagonalen conjugirte Durchmesser sind, einander gleich.

4) Hyperbel. Hier ist der Inhalt:

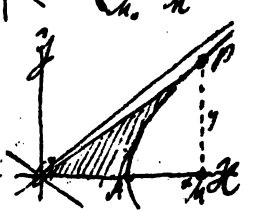
132 $$J = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right]_{x_0}^{x}$$

oder wenn P_0 im Scheitel der Hyperbel ist, lautet die Formel:



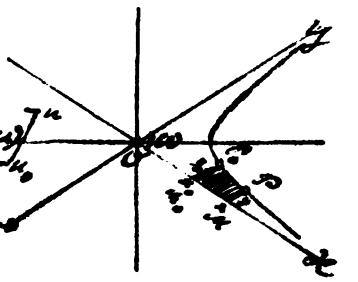
133 $$J = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} l\left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right\}$$

folglich ist das Stück OPA gleich $\frac{ab}{2} l\left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right\}$



Inhalt der Hyperbel für die Asymptoten absolutem genommen:

$$J = \frac{ab}{2} l\left\{\frac{x}{x_0}\right\} \qquad 134$$



5) Cycloide:

$$J = l^2\left[\frac{u}{2} - 2\sin u + \frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{u_0}^{u} \qquad 135$$

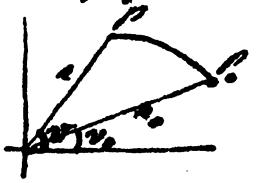
Für den Inhalt eines ganzen Cycloidenbogens erhalten wir also:

$$J = 3l^2\pi \qquad 136$$

d.h. derselbe ist dreimal so gross als der Flächeninhalt des Rollkreises.

Ist die Gleichung einer Kurve gegeben in Polarcoordinaten durch

$$r = f(v)$$

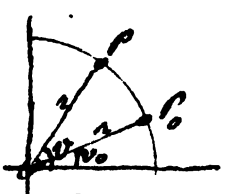


so ist der Flächeninhalt eines Sektors, das begrenzt wird von dem Kurvenbogen und zwei Radien vectoren r_0 und r mit den zugehörigen Anomalien v_0 und v:

$$J = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} r^2\,dv \qquad 137$$

Beispiele:

1) Für den Kreis, wo r constant ist, haben wir



$$J = \frac{r^2}{2}(v - v_0) \qquad 138$$

2) Das Kartesische Blatt hat die Gleichung

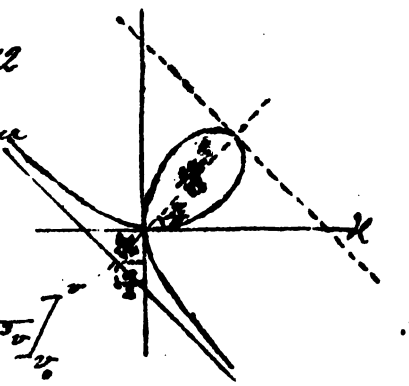
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad \text{oder} \qquad 139$$

$$x = \frac{t}{1+t^3} \quad ; \quad y = \frac{t^2}{1+t^3} \qquad 140$$

und in Polarcoordinaten:

$r = a^2 \cos^2\left(\frac{v}{2}\right)$ oder

141 $r = 3a \frac{\cos v \cdot \sin v}{\cos^3 v + \sin^3 v}$

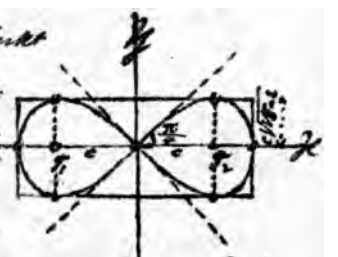


Hier ist

142 $$J = -\frac{3}{2} a^2 \left[\frac{1}{1+tg^3 v}\right]_{v_0}^{v}$$

also für das geschlossene Stück erhalten wir

143 $$J = \frac{3}{2} a^2$$



3) Lemniskate. Das Produkt der Abstände jedes Kurvenpunktes von den beiden Brennpunkten F_1 & F_2 ist constant und zwar gleich dem Quadrate des halben Abstandes dieser beiden Punkte. Gleichung der L.:

144 $$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = 0$$

Tangentengleichung im Punkte (x,y):

145 $$(x^2+y^2)(\xi x + \eta y) - c^2\{x(x+\xi) - y(y+\eta)\} = 0$$

Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten:

146 $$r^2 = a\cos(2v) \qquad \text{wo} \quad a = 2c^2$$

und hier ist

147 $$J = \frac{c^2}{2}\left[\sin(2v)\right]_{v_0}^{v}$$

wo die Grenzen zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegen müssen.

Der Flächeninhalt der ganzen Kurve ist

148 $$J = 2c^2$$

d.h. gleich dem doppelten Quadrate des

halben Abstandes der Brennpunkte.

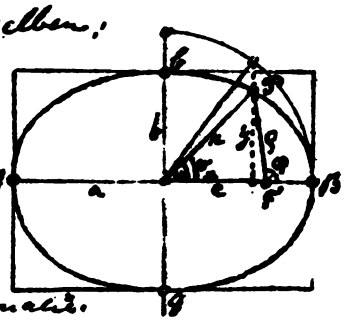
4. Ellipse, Gleichung derselben:

1) für den Mittelpunkt als Anfangspunkt:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 150

b) $\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos(u) \\ y = b\sin(u) \end{array} \right.$ 151

wo u die excentrische Anomalie.



c) in Polarcoordinaten:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}} \qquad 152$$

wo e die numerische Anomalie: $e = \frac{c}{a}$

" c die excentrische " $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

2) für einen Brennpunkt als Anfangspunkt in Polarcoordinaten (=Heliocentrische Coordinaten:)

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad 153$$

wo p der Parameter $\frac{b^2}{a}$ und wo φ die wahre Anomalie. Es besteht dann die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) \qquad 154$$

3) Gleichung der Ellipse in ϱ und u, (ϱ = Radiusvektor für einen Brennpunkt und u die excentrische Anomalie:):

$$\varrho = a(1 - e\cos u) \qquad 155$$

Für den Inhalt eines Flächenstückes der Ellipse, begrenzt von der Kurve und zwei Radienvektoren vom Brennpunkt aus, haben wir die Formel:

186 $$I = \frac{ab}{2}\left[u - e\sin\varphi\right]_{u_0}^{u}$$

wo u_0 und u die den begrenzenden Radien φ_0 und φ entsprechenden excentrischen Anomalien.

Die Kepplerschen Gesetze lauten:
1) Die Bahnen sämtlicher Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2) In gleichen Zeiten überstreicht der Radius vector seines Planeten gleiche Flächenräume, und daraus folgt die Formel:

187 $$\frac{2\pi t}{T} = (u - e\sin u)$$

wo t die von dem Perihelium (= Sonnennähe, im Gegensatz zu Aphelium = Sonnenferne) an gezählte Zeit, u die entsprechende excentrische Anomalie und T die ganze Umlaufszeit des Planeten bedeutet.
3) Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernung $\frac{(a-c)+(a+c)}{2} = a$ von der Sonne.

Rektifikation ebener Kurven.

Die Länge eines Bogenstückes zwischen den Abscissen x_0 und x einer Kurve, deren Glei-

dung gegeben ist durch

$$y = f(x)$$ ist

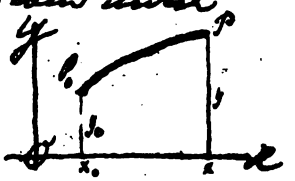
$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + p^2}\, dx \qquad 158$$

ist hingegen die Kurve gegeben durch

$x = \varphi(u)$ und

$y = \psi(u)$

so haben wir:



$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du \qquad 159$$

wo u_0 und u die den Abscissen x_0 und x entsprechenden Werthe der dritten unabhängigen Variablen u sind.

Ist die Kurve in Polarcoordinaten gegeben durch die Gleichung:

$$r = f(v)$$

so lautet die Formel:

$$s = \int_{v_0}^{v} \sqrt{r^2 + r'^2}\, dv \qquad 160$$

wo $r' = \frac{dr}{dv}$

Beispiele:

1) Parabel Die Länge eines Parabelbogens zwischen den Abscissen x_0 und x ist:

$$s = \left[x\sqrt{1 + \frac{a}{2x}} + \frac{a}{4} l\left\{\frac{x + \sqrt{x^2 + \frac{ax}{2}}}{\frac{a}{2}}\right\}\right]_{x_0}^{x}$$

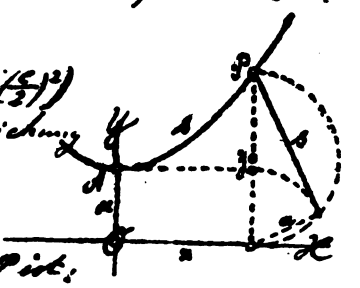
2) Der Umfang der Ellipse ist:

161 $$U = 2a\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{e^2}{1}-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\ldots\right\}$$

oder in Fällen, wo die numerische Excentricität $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ sehr klein ist, wie bei den Planetenbahnen:

$$U = 2a\pi\left(1-\left(\frac{e}{2}\right)^2\right)$$

3) Kettenlinie. Ihre Gleichung lautet:



163 $$y = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right\}$$

Die Länge des Bogens AP ist:

164 $$s = \sqrt{y^2-a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

— nach dem ersten Ausdruck also sehr leicht construirbar.

4) Cycloide. So ist:

165 $$s = -4l\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\varphi}$$

also die Länge des ganzen Bogens:

166 $$s = 8l,$$

d.h. gleich dem achtfachen Radius des Rollkreises.

5) Kardioide: es ist:

167 $$s = \left[4l\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right]_0^{\varphi}$$

also erhalten wir wie, bei der Cycloide für den ganzen Umfang:

168 $$s = 8l$$

wo l der Radius des festen Kreises.

6) Der Lemniskatenumfang ist:

169 $$s = 3a\pi\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\right\}$$

oder $$s = \frac{2c\pi}{M(1,\sqrt{\frac{1}{2}})} \qquad 130$$

d.h. a ist gleich dem Umfang eines Kreises vom Radius c, dividirt durch das arithmetisch-geometrische Mittel der Größen 1 und $\frac{1}{2}$.

γ) Archimedische Spirale:

$$s = a\left[\frac{v}{2}\sqrt{1+v^2} - \frac{1}{2}l\{-v+\sqrt{1+v^2}\}\right]_{v_0}^{v} \qquad 131$$

δ) Hyperbolische Spirale:

$$s = a\left[-\frac{\sqrt{1+v^2}}{v} + l\{v+\sqrt{1+v^2}\}\right]_{v_0}^{v} \qquad 132$$

ε) Logarithmische Spirale:

$$s = a\sqrt{1+b^2}\left(e^{\frac{v}{b}} - e^{-\frac{v}{b}}\right) \qquad 133$$

Rektifikation v. Raumkurven.

Ist eine räumliche Kurve gegeben durch die Gleichungen:

$x = \varphi(u)$; $y = \psi(u)$; $z = \chi(u)$,

so haben wir für die Länge eines Kurvenstückes:

$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du \qquad 134$$

wo u_0 und u die den Ordinaten $x_0 y_0 z_0$ & $x y z$ entsprechenden Werthe der dritten unabhängigen Variablen u sind.

Kubatur von Rotationskörpern,

deren Meridiane in Bezug auf die Rotationsaxe, als x = Axe, und eine beliebige dazu gewählte Senkrechte, als y = Axe, gegebenen Gleichungen genügen.

1) Die Gleichung hat die Form:

$$y = f(x)$$ dann ist

185
$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx$$

2) Die Gleichung des Meridians lautet:

$$x = \varphi(u) \quad ; \quad y = \psi(u),$$

dann ist der Inhalt des durch seine Drehung um die x = Axe entstehenden Rotationskörpers:

186
$$V = \pi \int_{u_0}^{u} y^2 \frac{dx}{du} du$$

wo u_0 und u den Werthen von x_0 und x entsprechen.

Beispiele:

1) Volumen des Kegelstumpfes:

187
$$V = \frac{l\pi}{3}\{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\}$$

wo l der Abstand der beiden Basisflächen und r_1 und r_2 deren resp. Radien.

2) Volumen der Kugelzone:

188
$$V = \pi\left[l^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{x}$$

Insbes. ist der Inhalt der ganzen Kugel:

189
$$V = \frac{4}{3}\pi l^3$$

3) Rotationsparaboloid:

a) Für die x-Axe als Rotationsaxe:

$$V = \pi p (x^2 - x_0^2) \qquad 180$$

b) Für die y-Axe als Rotationsaxe:

$$V = \frac{\pi}{10} \frac{1}{p^2} (y^5 - y_0^5) \qquad 181$$

wo p der Parameter.

4) Rotationsellipsoid:

a) Für die große Axe als Rotationsaxe:

$$V = \frac{4}{3} a b^2 \pi \qquad 182$$

b) Für die Kleine Axe als Rotationsaxe:

$$V = \frac{4}{3} a^2 b \pi \qquad 183$$

5) Der Inhalt eines Körpers der bei der Rotation eines Cycloidenbogens entsteht, ist: $V = \frac{\pi l^3}{2} \left[5u - \frac{15}{4} \sin(u) + \frac{3}{4} \sin(2u) - \frac{1}{6} \sin(3u) \right]_0^{2\pi}$ 184

also ist der Inhalt des compleben Rotations-Körpers

$$V = 5 \pi^2 l^3 \qquad 185$$

6) Kubatur des Kreisringes:

$$V = 2m\pi (l^2 \pi) = 2\pi^2 m l^2 \qquad 186$$

wo l der Radius des rotierenden Kreises und m der Abstand eines Centrums von der Rotationsaxe.

Complanation der Rotationskörper,

deren Meridiane (analog wie vorher) gegeben sind durch die Gleichung

1) $y = f(x)$ oder

2) $x = \varphi(u)$ & $y = \psi(u)$.

Man hat für die Oberfläche des durch Drehung des Meridians um die x-Axe entstandenen Rotations-Körpers die Formeln:

135 1) $$O = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1+p^2}\,dx$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$ oder

136 2) $$O = 2\pi \int_{u_0}^{u} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

wo u_0 und u den Werthen von x_0 und x entsprechen.

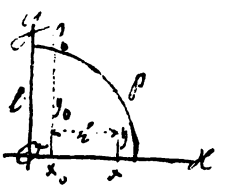
Beispiele:

1) Oberfläche des Kegelstumpfes:

137 $$O = \pi s(r_1 + r_2)$$

wo r_1 & r_2 die Radien der Basisflächen und $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + l^2}$ die Kantenlänge des Mantels. l ist der Abstand der Basisflächen.

2) Oberfläche der Kugelzone:



138 $O = 2\pi r(x - x_0) = 2\pi r h$,

d.i.: die Oberfläche einer Kugelzone ist gleich der Oberfläche eines Cylinders von gleichem Radius wie die Kugel und von gleicher Höhe wie die betreffende Kugelzone.

Aus obiger Formel folgt für die Oberfläche der ganzen Kugel

$$O = 4\pi r^2$$

139 d.i. gleich dem 4-fachen des größten Kugelkreises.

3) Oberfläche des Kreisringes:

$$O = 2\pi m(2\pi l) \qquad 180$$
$$= 4\pi^2 m l$$

wo m der Abstand des Mittelpunktes von der Rotationsaxe.

4) Oberfläche des Rotationsparaboloids:

$$O = \frac{2\sqrt{a}}{3}\pi\left[\sqrt{(3x+a)^3}\right]_{x_0}^{x} \qquad 181$$

5) Oberfläche des länglichen Rotations-ellipsoids:

$$O = \frac{ab\pi}{c}\left[\frac{cx}{a}\sqrt{a^2 - c^2x^2} + \arcsin\left(\frac{cx}{a}\right)\right]_{x_0}^{x}, \qquad 182$$

also ist die ganze Oberfläche:

$$O = 2\pi b\left\{b + \frac{a}{e}\arcsin(e)\right\} \qquad 183$$

6) Die ganze Oberfläche des abgeplatteten Ellipsoids ist:

$$O = 2\pi a\left\{a + \frac{b^2}{c}\,l\left(\frac{a+c}{b}\right)\right\} \qquad 184$$

7) Oberfläche des Rotations-Körpers, dessen Meridian ein Cycloidenbogen ist:

$$O = 16\pi l^2\left[\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{u}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{u_0}^{u}, \qquad 185$$

folglich ist die Oberfläche des compleken Körpers:

$$O = \frac{64}{3}\pi l^2 \qquad 186$$

Guldin'sche Regeln:

1) Der Inhalt eines Rotations-Körpers ist gleich dem Produkte aus der rotirenden Fläche in den Weg des Schwerpunktes derselben.

2) Die Oberfläche eines Rotations-Körpers ist gleich der Länge des rotirenden Meridians, multiplizirt in den Weg, den sein Schwer-

punkt bei einmaliger Umdrehung beschreibt.

Die Lehre von den mehrfachen Integralen.

Sätze:

1) Ist gegeben

187 $$\varphi(x,t) = \int f(x,t)\,dx$$

so wird dieses Integral nach der Variablen t differenziirt, indem wir die Differenziation unter dem Integralzeichen ausführen:

187 $$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \int \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx$$

2) Der gleiche Satz gilt auch für bestimmte Integrale:

188 $$\frac{\partial \int_a^b f(x,t)\,dx}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx$$

3) Haben wir ein bestimmtes Integral zu differenziieren nach einer Variablen t, von welcher eine der Grenzen des Integrals abhängt, so führen uns folgende zwei Formeln zum Ziele:

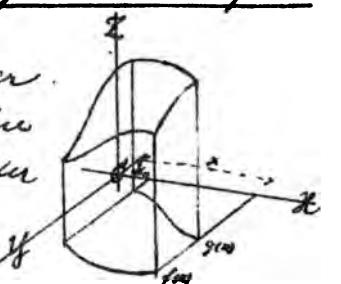
189 $v = \varphi(t)$: $$\frac{\partial \int_a^v f(x)\,dx}{\partial t} = f(v)\frac{dv}{dt}$$

190 $u = \psi(t)$: $$\frac{\partial \int_u^b f(x)\,dx}{\partial t} = -\frac{\partial \int_b^u f(x)\,dx}{\partial t} = -f(u)\frac{du}{dt}$$

145 2) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

196 3) $$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Volumenbestimmung allgemeiner Körper.



Volumen eines Körpers, der oben begrenzt ist durch eine krumme Oberfläche von der Gleichung

$$z = F(x,y)$$

, unten durch den ebenen Querschnitt mit der xy-Ebene, welcher selbst begrenzt ist durch zwei Kurven von den Gleichungen:

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x)$$

und zwei der y-Axe parallele Gerade von den Abscissen x_0 und x, während seine seitliche Begrenzung gebildet wird durch einen der z-Axe parallelen Cylinder über jenem Querschnitt in der xy-Ebene bis zu seinem Schnitt mit der besagten krummen Oberfläche:

197
$$V = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0 = g(x)}^{y = f(x)} F(x,y)\, dy\, dx$$

Bei der Berechnung desselben wird man zuerst:

$$\int_{y_0}^{y} F(x,y)\,dy = \varphi(x)$$

bestimmen, in dem man bei der Integration x als constante Größe betrachtet und dann die Grenzen y_0 und y einsetzt; hernach bestimmt man auch:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$$

und setzt die Grenzen x_0 und x ein.

Sind die beiden Kurven in der xy-Ebene gegeben durch

$$s = f(\varphi) \quad \text{und} \quad s = g(\varphi)$$

so kann die Gleichung der Rinnenoberfläche:

$$z = F(x,y)$$

durch Einsetzen von

$$x = s\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = s\sin\varphi$$

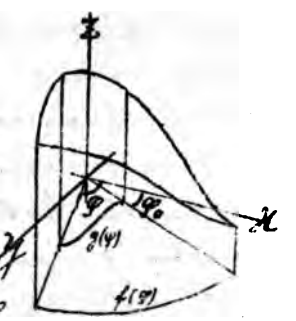
auf die Form gebracht werden:

$$z = G(s,\varphi)$$

und wir haben dann für das Volumen die folgende Formel:

$$V = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \int_{s_0=g(\varphi)}^{s=f(\varphi)} G(s,\varphi)\, s\, ds\, d\varphi \qquad , \qquad 148$$

welches Integral auf analoge Weise wie das vorige bestimmt wird. Hier bilden also im Querschnitt nicht zwei der y-Achse parallele Gerade die seitliche Begrenzung derselben, sondern zwei Radien vectoren mit den Ampl. φ_0 & φ



Sehr häufig kommt bei der Volumenberechnung folgende Formel zur Verwendung:

$$V = \int_{\eta_0}^{\eta} \int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi,\eta) \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{matrix} \right| d\xi\, d\eta \qquad (799)$$

wo $G(\xi,\eta)$ aus der Gleichung der Oberfläche

$$z = F(x,y) \qquad (1$$

entsteht durch Einsetzen von

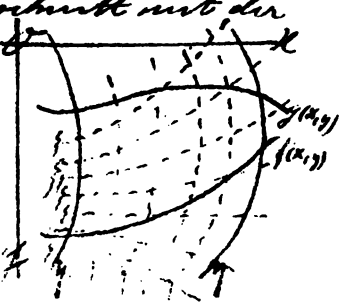
$$x = \varphi(\xi,\eta) \quad \text{&} \quad y = \psi(\xi,\eta) \qquad (2$$

folgend aus

$$\xi = \varphi^*(x,y) \quad \text{&} \quad \eta = \psi^*(x,y) \qquad (3$$

welch letzteres die Gleichungen von Kurven (mit den resp. Parametern ξ und η — für jeden Werth derselben erhalten wir eine Kurve in jedem Systeme) in der xy-Ebene sind, die den Querschnitt des Körpers in lauter unendlich kleine Flächenelemente zerlegen.

Die Grenzen sind so zu wählen, dass der dem Werthepaare ξ,η entsprechende Punkt die ganze Grundfläche durchläuft. Statt der seitlich begrenzenden Geraden parallel zur z-Achse im Querschnitt mit der xy-Ebene treten hier die den Parameterwerthen η und η_0 entsprechenden Kurven des η-Systems. Die Grenzen ξ und ξ_0 ergeben die



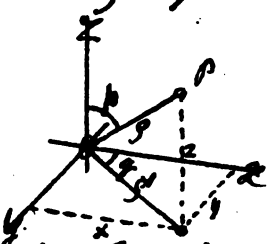
aus den Gleichungen der beiden anderen den Querschnitt begrenzenden Kurven:

$$f(x,y) = 0 \quad \& \quad g(x,y) = 0$$

mit Hilfe der Gleichungen (3).

Die im Integral der letzten Volumenformel vorkommende Determinante heißt Funktionaldeterminante der Funktionen x und y nach ξ & η.

Bedeuten ξ und η die Polarcoordinaten des Raumes: ρ und φ, so gehen die ihnen als Parameter in der Ebene entsprechenden Kurven über in Radienvektoren (für die φ) und in die Projektionen derjenigen Kurven, welche die zu jedem ρ gehörigen Rotationsregel um die Z-Axe aus der gegebenen Oberfläche herausschneiden. (Parameter dieser Kurven ist also ρ)



Häufig werden die Kurvensysteme in der xy-Ebene als Systeme ähnlicher und ähnlich gelegener concentrischer (für den Anfangspunkt des Coord.-Syst.) Ellipsen, deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 \,,$$

wo ρ der Parameter, und als Strahlenbüschel (aus demselben Punkte):

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{ay}{bx}\right) \,,$$

wo φ der Parameter, gewählt.

Man kann als ebenes Kurvensystem auch ein System <u>confokaler Kegelschnitte</u>, (concentrische Ellipsen und Hyperbeln für den Anfangspunkt des Coord.-Syst.) wählen. Das Integral wird dann in das folgende transformirt:

200 $$V = \int\int G(p,q) \cdot \frac{(a-b)(b-q)}{(a+p)(a+q)(b+p)(b+q)}\, dp\, dq\,,$$

wo bezüglich der Grenzen auf das bei der allgemeinen Formel gesagte verwiesen wird. p und q sind die Parameter der Kegelschnitte, und a und b sind die constanten Größen der Gleichung des Systems $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$, wo λ der Parameter: p oder q. (Siehe weiteres in der Lehre von den gewöhnlichen Differenzialgleichungen!)

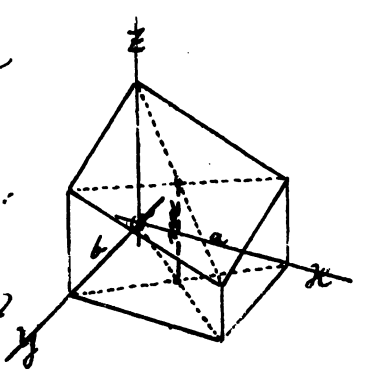
Concentrische Kreise und Radien-Vektoren werden ebenfalls oft als zerlegende Kurvensysteme benützt.

<u>Beispiele</u>:

1) Inhalt eines rechteckigen <u>Prismas</u>, das oben abgeschlossen ist durch die Ebene von der Gleichung:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad :$$

201 $$= ab\left\{\frac{\alpha a}{2} + \frac{\beta b}{2} + \gamma\right\}$$
$$= abm$$



wo a und b die Kantenlängen des normalen Prismenquerschnitts in der xy-Ebene & wo ferner m die mittlere Höhe der Seitenkanten.

2) Volumen des Ellipsoids:

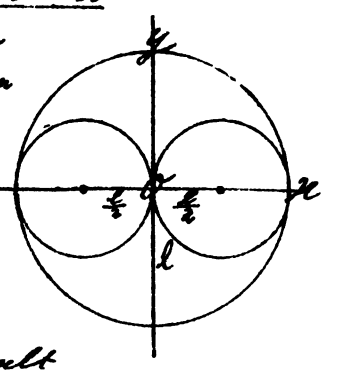
$$V = \frac{4}{3} a b c \pi \qquad 202$$

wenn a, b, c die Halbaxen.

3) Volumen der Kugel vom Radius r:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi \qquad 203$$

4) Volumen des Vivianischen Körpers (: Die Cylinder über den kleinern Kreisen werden oben und unten begrenzt durch die Kugeloberfläche über dem größern Kreis):



$$V = \frac{8}{3} l^3 \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right\}$$

$$V = \frac{4}{3} l^3 \pi - \frac{16}{9} l^3 \qquad 204$$

Der erste Theil ist der Inhalt der Kugel, also ist der zweite das Volumen des Körpers außerhalb der Cylinder, begrenzt von der Kugeloberfläche. Merkwürdiger Weise kommt hier π nicht vor im Volumenausdruck dieses ziemlich complizirten Körpers.

5) Wird über der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in der xy-Ebene ein der z-Axe paralleler Cylinder errichtet, der oben abgeschlossen ist durch das elliptische Paraboloid:

$$z = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

so ist der Inhalt des so entstandenen Kör-

205 pers: $$V = \frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2}\right).$$

Ist die Begrenzungsfläche

$$r = F(\rho, \varphi)$$

eines Körpers in Polarcoordinaten ge-

geben, so erhalten wir für seinen In-

halt:

206 $$V = \iiint r^2 \sin\rho \, d\rho \, d\varphi \, dr$$

oder zwischen Grenzen integriert:

206' $$V = \frac{1}{3}\iint r^3 \sin\rho \, d\rho \, d\varphi$$

Die Grenzen sind so zu wählen, dass der Punkt innerhalb des Körpers alle Lagen, doch nur einmal, annimmt.

Quadratur allgemeiner Oberflächen.

Lautet die begrenzende Oberfläche:

$$z = F(x, y)$$

so haben wir für den Inhalt eines Stük-

kes dieser Oberfläche:

207 $$J = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \, dx \, dy$$

wo aus den gegebenen Bedingungen die Grenzen so gesetzt werden müssen, dass der Punkt das ganze Oberflächen-

stück durchläuft, doch jede Lage nur einmal annimmt.

Dieses Integral kann auf folgende zwei transformiert werden:

$$\int_{q_0}^{q}\int_{p_0}^{p}\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right\}-\left\{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right\}^2}\,dp\,dq$$

oder =

$$\int_{q_0}^{q}\int_{p_0}^{p}\sqrt{\left\{\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial p}\right\}^2+\left\{\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}\right\}^2+\left\{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}\right\}^2}\,dp\,dq$$

wo $z = F(x,y)$

durch Einsetzen von

$x = F(p,q)$ & $y = G(p,q)$,

folgend aus:

$p = \varphi(x,y)$ & $q = \psi(x,y)$,

übergeführt wurde in

$z = H(p,q)$

Bezüglich p und q, so wie der Grenzen gilt die gleiche Bemerkung, wie sie oben a. S. 126 gemacht wurde.

Ist die Gleichung der Fläche gegeben durch:

$x = \varphi(p,q)$; $y = \psi(p,q)$; $z = \chi(p,q)$

so sind obige beiden Formeln für Oberflächenermittlung unmittelbar anzuwenden und es müssen nur noch die Grenzen richtig gesetzt werden.

Kubatur von Rotationskörpern,

deren Meridiane in Bezug auf die Rotationsaxe, als x-Axe, und eine beliebige dazu gemählte Senkrechte, als y-Axe, gegebenen Gleichungen genügen.

1) Die Gleichung hat die Form:

$$y = f(x)$$ dann

ist

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx$$

2) Die Gleichung des Meridians lautet:

$$x = \varphi(u) \quad ; \quad y = \psi(u),$$

dann ist der Inhalt des durch seine Drehung um die x-Axe entstehenden Rotationskörpers:

$$V = \pi \int_{u_0}^{u} y^2 \frac{dx}{du} du$$

wo u_0 und u den Werthen von x_0 und x entsprechen.

Beispiele:

1) Volumen des Kegelstumpfes:

$$V = \frac{l\pi}{3}\{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\}$$

wo l der Abstand der beiden Basisflächen und r_1 und r_2 deren resp. Radien.

2) Volumen der Kugelzone:

$$V = \pi\left[l^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{x}$$

speziell ist der Inhalt der ganzen Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi l^3$$

3) Rotationsparaboloid:

a) Für die x-Axe als Rotationsaxe:

$$V = \pi p (x^2 - x_0^2) \qquad 180$$

b) Für die y-Axe als Rotationsaxe:

$$V = \frac{\pi}{10} \frac{1}{p^2} (y^5 - y_0^5) \qquad 181$$

wo p der Parameter.

4) Rotationsellipsoid:

a) Für die große Axe als Rotationsaxe:

$$V = \frac{4}{3} a b^2 \pi \qquad 182$$

b) Für die kleine Axe als Rotationsaxe:

$$V = \frac{4}{3} a^2 b \pi \qquad 183$$

5) Der Inhalt eines Körpers der bei der Rotation eines Cycloidenbogens entsteht, ist: $V = \frac{\pi l^3}{2} \left[5u - \frac{15}{4} \sin(u) + \frac{3}{4} \sin(2u) - \frac{1}{6} \sin(3u) \right]_{0}^{2\pi}$ 184

also ist der Inhalt des completen Rotations-Körpers

$$V = 5 \pi^2 l^3 \qquad 185$$

6) Inhalter des Kreisringes:

$$V = 2m\pi (l^2 \pi) = 2\pi^2 m l^2 \qquad 186$$

wo l der Radius des rotierenden Kreises und m der Abstand seines Centrums von der Rotationsaxe.

Complanation der Rotationskörper

deren Meridiane (analog wie vorher) gegeben sind durch die Gleichung

1) $y = f(x)$ oder

2) $x = \varphi(u)$ & $y = \psi(u)$.

Man hat für die Oberfläche des durch Drehung des Meridians um die x-Axe entstandenen Rotations-Körpers die Formeln:

135 1) $$O = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1+p^2}\,dx$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$ oder

176 2) $$O = 2\pi \int_{u_0}^{u} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

wo u_0 und u den Werthen von x_0 und x entsprechen.

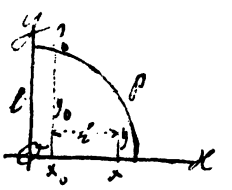
Beispiele:

1) Oberfläche des Kegelstumpfes:

177 $$O = \pi s (r_1 + r_2)$$

wo r_1 & r_2 die Radien der Basisflächen und $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$ die Kantenlänge des Mantels. h ist der Abstand der Basisflächen.

2) Oberfläche der Kugelzone:



178 $O = 2\pi r(x - x_0) = 2\pi r h$,

d.h. die Oberfläche einer Kugelzone ist gleich der Oberfläche eines Cylinders von gleichem Radius wie die Kugel und von gleicher Höhe wie die betreffende Kugelzone.

Aus obiger Formel folgt für die Oberfläche der ganzen Kugel

$$O = 4\pi r^2$$

79 d.h. gleich dem 4-fachen eines größten Kugelkreises.

3/ Oberfläche des Kreisringes:

$$O = 2\pi m(2\pi l) \qquad 180$$
$$= 4\pi^2 m l$$

wo m der Abstand des Mittelpunktes von der Rotationsaxe.

4/ Oberfläche des Rotationsparaboloids:

$$O = \frac{2\sqrt{a}}{3}\pi\left[\sqrt{(2x+a)^3}\right]_{x_0}^{x} \qquad 181$$

5/ Oberfläche des länglichen Rotations-ellipsoids:

$$O = \frac{ab\pi}{c}\left[\frac{cx}{a}\sqrt{a^2 - c^2x^2} + \arcsin\left(\frac{cx}{a}\right)\right]_{x_0}^{x}, \qquad 182$$

also ist die ganze Oberfläche:

$$O = 2\pi b\left\{b + \frac{a}{e}\arcsin(e)\right\} \qquad 183$$

6/ Die ganze Oberfläche des abgeplatteten Ellipsoids ist:

$$O = 2\pi a\left\{a + \frac{b^2}{c}\,l\left(\frac{a+c}{b}\right)\right\} \qquad 184$$

7/ Oberfläche des Rotations-Körpers, dessen Meridian ein Cycloidenbogen ist:

$$O = 16\pi l^2\left[\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{u}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{u_0}^{u}, \qquad 185$$

folglich ist die Oberfläche des compleken Körpers:

$$O = \frac{64}{3}\pi l^2 \qquad 186$$

Guldin'sche Regeln:

1/ Der Inhalt eines Rotations-Körpers ist gleich dem Produkte aus der rotirenden Fläche in den Weg des Schwerpunktes derselben.

2/ Die Oberfläche eines Rotations-Körpers ist gleich der Länge des rotirenden Meridians, multiplizirt in den Weg, den sein Schwer-

punkt bei einmaliger Umdrehung beschreibt.

Die Lehre von den mehrfachen Integralen.

Sätze:

1) Ist gegeben

187 $$\varphi(x,t) = \int f(x,t)\,dx$$

so wird dieses Integral nach der Variablen t differenziirt, indem wir die Differenziation unter dem Integralzeichen ausführen:

187 $$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \int \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx$$

2) Der gleiche Satz gilt auch für bestimmte Integrale:

188 $$\frac{\partial \int_a^b f(x,t)\,dx}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx$$

3) Haben wir ein bestimmtes Integral zu differenziren nach einer Variablen t, von welcher eine der Grenzen des Integrals abhängt, so führen uns folgende zwei Formeln zum Ziele:

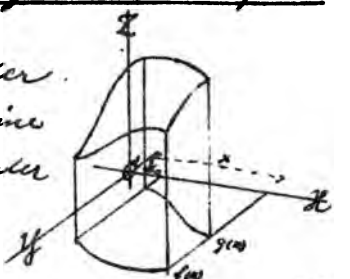
189 $v = \varphi(t)$: $$\frac{\partial \int f(x)\,dx}{\partial t} = f(v)\frac{dv}{dt}$$

190 $u = \psi(t)$: $$\frac{\partial \int_u^b f(x)\,dx}{\partial t} = -\frac{\partial \int_b^u f(x)\,dx}{\partial t} = -f(u)\frac{du}{dt}$$

145 2) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

146 3) $$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Volumenbestimmung allgemeiner Körper.



Volumen eines Körpers, der oben begrenzt ist durch eine krumme Oberfläche von der Gleichung

$$z = F(x,y)$$

, unten durch den ebenen Querschnitt mit der xy-Ebene, welcher selbst begrenzt ist durch zwei Kurven von den Gleichungen:

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x)$$

und zwei der y-Axe parallele Gerade von den Abscissen x_0 und x_1, während seine seitliche Begrenzung gebildet wird durch einen der z-Axe parallelen Cylinder über jenem Querschnitt in der xy-Ebene bis zu seinem Schnitt mit der besagten krummen Oberfläche:

197 $$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0 = g(x)}^{y = f(x)} F(x,y)\, dy\, dx$$

Bei der Berechnung desselben wird man zuerst:

Sehr häufig kommt bei der Volumenberechnung folgende Formel zur Verwendung:

199
$$V = \int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\xi_0}^{\xi} G(\xi,\eta)\left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{matrix}\right| d\xi\, d\eta$$

wo $G(\xi,\eta)$ aus der Gleichung der Oberfläche

$$z = F(x,y) \qquad (1$$

entsteht durch Einsetzen von

$$x = \varphi(\xi,\eta) \quad \& \quad y = \psi(\xi,\eta) \qquad (2$$

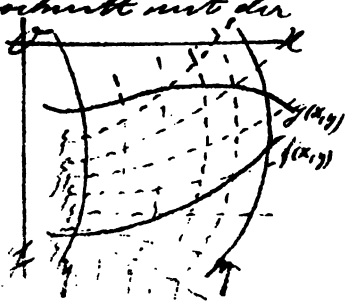
folgend aus

$$\xi = \varphi^*(x,y) \quad \& \quad \eta = \psi^*(x,y) \qquad (3$$

welch letzteres die Gleichungen von Kurven (mit den resp. Parametern ξ und η — für jeden Werth derselben erhalten wir eine Kurve in jedem System) in der xy-Ebene sind, die den Querschnitt des Körpers in lauter unendlich kleine Flächenelemente zerlegen.

Die Grenzen sind so zu wählen, dass der dem Werthepaare ξ,η entsprechende Punkt die ganze Grundfläche durchläuft.

Statt der seitlich begrenzenden Geradenparallel zur z-Axe im Querschnitt mit der xy-Ebene treten hier die den Parameterwerthen η und η_0 entsprechenden Kurven des η-Systems. Die Grenzen ξ und ξ_0 ergeben sich



wo φ der Parameter, gewählt.

Man kann als ebenes Kurvensystem auch ein System confokaler Kegelschnitte, (concentrische Ellipsen und Hyperbeln für den Anfangspunkt des Coord.-Syst.) wählen. Das Integral wird dann in das folgende transformirt:

200 $$V = \int\int \mathfrak{G}(p,q) \cdot \frac{(a-b)(b-q)}{(a+p)(a+q)(b+p)(b+q)}\, dp\, dq\,,$$

wo bezüglich der Grenzen auf das bei der allgemeinen Formel gesagte verwiesen wird. p und q sind die Parameter der Kegelschnitte, und a und b sind die constanten Größen der Gleichung des Systems $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$, wo λ der Parameter: p oder q. (Siehe meiste unten in der Lehre von den gewöhnlichen Differenzialgleichungen!)

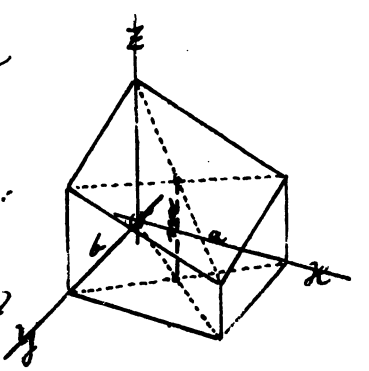
Concentrische Kreise und Radien-Vektoren werden ebenfalls oft als zerlegende Kurvensysteme benützt.

Beispiele:

1) Inhalt eines rechteckigen Prismas, das oben abgeschlossen ist durch die Ebene von der Gleichung:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad :$$

201 $$= ab\left\{\frac{\alpha a}{2} + \frac{\beta b}{2} + \gamma\right\}$$
$$= abm$$



wo a und b die Kantenlängen des normalen Prismenquerschnitts in der xy-Ebene & wo ferner m die mittlere Höhe der Seitenkanten.

2) Volumen des Ellipsoids:

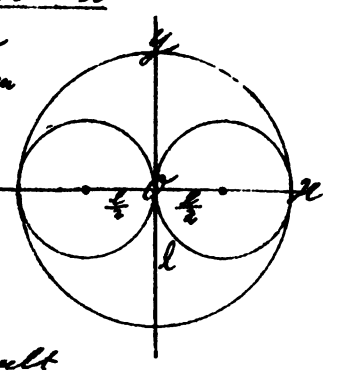
$$V = \frac{4}{3} a b c \pi \qquad 202$$

wenn a, b, c die Halbaxen.

3) Volumen der Kugel vom Radius r:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi \qquad 203$$

4) Volumen des Vivianischen Körpers (: Die Cylinder über den kleinern Kreisen worden oben und unten begrenzt durch die Kugeloberfläche über dem größern Kreis):



$$V = \frac{8}{3} l^3 \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right\}$$

$$V = \frac{4}{3} l^3 \pi - \frac{16}{9} l^3 \qquad 204$$

Der erste Theil ist der Inhalt der Kugel, also ist der zweite das Volumen des Körpers außerhalb der Cylinder, begrenzt von der Kugeloberfläche. Merkwürdiger Weise kommt hier π nicht vor im Volumenausdruck dieses ziemlich complizirten Körpers.

5) Wird über der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in der xy-Ebene ein der z-Axe paralleler Cylinder errichtet, der oben abgeschlossen ist durch das elliptische Paraboloid:

$$z = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

so ist der Inhalt des so entstandenen Kör-

205 pers: $$V = \frac{ab\pi}{4}\left\{\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2}\right\}.$$

Ist die Begrenzungsfläche

$$r = F(\varphi, \psi)$$

eines Körpers in Polarcoordinaten ge-

geben, so erhalten wir für seinen In-

halt:

206 $$V = \iiint r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi \, dr$$

oder zwischen 0 und r integriert:

206' $$V = \frac{1}{3}\iint r^3 \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

Die Grenzen sind so zu wählen, dass der

Punkt innerhalb des Körpers alle Lagen,

doch nur einmal, annimmt.

Cubadratur allgemeiner Oberflächen.

Lautet die begrenzende Oberfläche:

$$z = F(x, y)$$

so haben wir für den Inhalt eines Stü-

ckes dieser Oberfläche:

207 $$J = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \, dx \, dy$$

wo aus den gegebenen Bedingungen die

Grenzen so gesetzt werden müssen,

dass der Punkt das ganze Oberflächen-

stück durchläuft, doch jede Lage nur einmal annimmt.

Dieses Integral kann auf folgende zwei transformiert werden:

$$\int_{q_0}^{q_1}\int_{p_0}^{p_1}\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right\}-\left\{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}\right\}^2}\,dp\,dq$$

oder =

$$\int_{q_0}^{q_1}\int_{p_0}^{p_1}\sqrt{\left\{\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial p}\right\}^2+\left\{\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p}\right\}^2+\left\{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}\right\}^2}\,dp\,dq$$

wo $z = F(x,y)$

durch Einsetzen von

$x = F(p,q)$ & $y = G(p,q)$,

folgendes aus:

$p = \varphi(x,y)$ & $q = \psi(x,y)$,

übergeführt wurde in

$z = H(p,q)$

Bezüglich p und q, so wie der Grenzen gilt die gleiche Bemerkung, wie sie oben a. S. 126 gemacht wurde.

Ist die Gleichung der Fläche gegeben durch:

$x = \varphi(p,q)$; $y = \psi(p,q)$; $z = \chi(p,q)$

so sind obige beiden Formeln für Oberflächenermittlung unmittelbar anzuwenden und es müssen nur noch die Grenzen richtig gesetzt werden.

Bedeuten p und q räumliche Polarcoordinaten:

$$x = r \sin p \cos q$$
$$y = r \sin p \sin q$$
$$z = r \cos p \qquad \text{also}$$
$$q = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$p = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

und ist die Oberfläche gegeben durch

$$r = F(p,q)$$

so gehen die beiden Integrale für die Größe der Oberfläche über in

310
$$F = \int_{q_0}^{q} \int_{p_0}^{p} \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2\right\} \sin^2 p + \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2}\, r\, dp\, dq$$

wo die Grenzen auf wiederholt angegebene Weise zu wählen sind.

Beispiele:

1) Oberfläche des Vivianischen Körpers:

211
$$F = 4l^2\{\pi - 2\}$$
$$= 4\pi l^2 - 8l$$

Analoge Bemerkung wie beim Volumen desselben!

2) Oberfläche der Kugel vom Radius l:

212
$$F = 4\pi l^2$$

3) Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks:

213
$$F = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) l^2$$

wo $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ der sphärische Exceß.

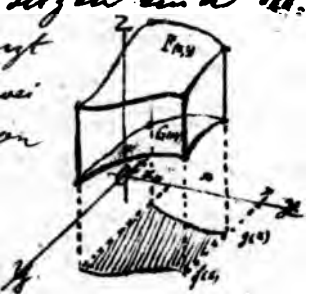
Ist uns ein Körper gegeben, in dem die Dichtigkeit in jedem Punkte eine Funktion der Coordinaten ist, so beträgt die Masse eines unendlich kleinen Parallelepipedons

$$dx\,dy\,dz.\,F(x,y,z)$$

wo $F(x,y,z)$ die für die Ausdehnung des Parallelepipedons als constant betrachtete Dichte. Die Masse des ganzen Körpers ist dann:

$$M = \iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad 214$$

wo noch die Grenzen zu setzen sind. Wäre z. B. der Körper begrenzt unten und oben durch zwei Raumme Oberflächen von den Gleichungen:



$$z = F(x,y)$$
$$z = G(x,y)$$

und seitlich von einem der z-Axe parallelen Cylinder über zwei Curven von den Gleichungen:

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x),$$

zwischen den Abscissen x_0 und x, als Querschnitt in der xy-Ebene, so hätten wir

$$M = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0 = g(x)}^{y = f(x)} \int_{z_0 = G(xy)}^{z = F(x,y)} f(x,y,z)\,dz \cdot dy \cdot dx \qquad 215$$

Ist
$$p = f(x,y,z)$$
$$q = g(x,y,z) \qquad (1$$
$$r = h(x,y,z)$$

also $x = \varphi(p,q,r)$ $y = \psi(p,q,r)$ $z = \chi(p,q,r)$, (2
so geht durch Einsetzen dieser Werthe in $F(x,y,z)$ diese Funktion über in $G(p,q,r)$ und das Integral dreifache kann, analog wie früher das zweifache, auf folgendes transformirt werden:

215 $$M = \iiint G(p,q,r) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix} dp\,dq\,dr$$

Bezüglich p, q und r, sowie der Grenzen, gilt analoges, wie beim zweifachen Integrale, resp. seiner Transformation bemerkt wurde. Die Gleichungen 1) bedeuten Flächensysteme; für jeden Werth der Parameter erhalten wir andere Flächen und der ganze Raum wird durch dieselben in unendlich kleine Elemente zerlegt. Nehmen wir (analog wie in der Ebene) hier im Raume ein System <u>confokaler Flächen zweiten Grades</u>:

$$\frac{x^2}{a+h} + \frac{y^2}{b+h} + \frac{z^2}{c+h} = 1 \qquad ,$$

wo h der Parameter (p, q oder r) so wird uns der ganze Raum dadurch in unendlich kleine Parallelepipeda (rechtwinklige) zer-

Man bezeichnet die Summe aller dieser Ausdrücke:

$$\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} = \frac{dm}{r}$$

erstreckt über den ganzen Körper, also

212 $$P = \iiint \frac{1}{r}\,dm = \iiint \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

(wo noch die Grenzen, entsprechend den gegebenen Bedingungen der Begrenzung des Körpers zu setzen sind;) als das:

<u>Potenzial des Körpers für jenen Punkt,</u>

welches also, wenn die Masse gegeben ist, allein Funktion von x, y und z ist, d. h. wenn wir partiell nach den dreierlei Richtungen differenzieren, so erhalten wir:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \iiint \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,dm = -\iiint \frac{(x-\xi)}{r^3}\,dm$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\iiint \frac{(y-\eta)}{r^3}\,dm$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\iiint \frac{(z-\zeta)}{r^3}\,dm$$

also

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\iiint \frac{dm}{r^2}\cos\alpha$$

218 $$\frac{\partial P}{\partial y} = -\iiint \frac{dm}{r^2}\cos\beta$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\iiint \frac{dm}{r^2}\cos\gamma$$

Wird der Punkt von dem Körper nach

per entfernen würde.

Die Punkte im Raume, die in Bezug auf einen Körper gleiches Potenzial haben, bilden eine Oberfläche und dadurch wird der ganze Raum in ein System von <u>Flächen gleichen Potenzials</u> zerlegt. Die Richtung der wirkenden Kraft steht stets senkrecht auf diesen Oberflächen in jedem einzelnen Punkt derselben. Die Ableitung des Potentials nach der Richtung irgend einer Tangente einer solchen Fläche ist stets gleich Null, da die Kraft nach dieser Richtung keine Komponente haben kann. Die Differenzialgleichung der Flächen gleichen Potenzials lautet:

220 $$\underline{\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = 0}$$

Beispiele:

1) <u>Potenzial einer homogenen Kugel</u> für einen im Abstand R <u>außen</u> ihr gelegenen Punkt von der Masse 1:

221 $$P = -\frac{4\pi\varrho}{3R}(r^3 - r_0^3) = -\frac{M}{R}$$

2) für einen <u>innerhalb</u> gelegenen Punkt:

222 $$P = -\frac{4\pi\varrho}{2}(r^3 - r_0^3)$$

es ist also für einen solchen Punkt unabhängig vom Abstande R vom Kugelmittelpunkt, seine Ableitung nach irgend einer Richtung ist also gleich Null.

d.h. die Resultirende der Anziehung einer Hohlkugel auf irgend einen innerhalb gelegenen Punkt ist gleich Null, während sie für einen äußern Punkt so wirkt, wie wenn die ganze Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. –

Es bedeuten in den letzten beiden Formeln ρ die constante Dichte der Masse, r_0 der Radius der innern, r der der äußern Oberfläche. Ist nun endlich

3) der Abstand R des Punktes zwischen r_0 und r, also er selbst in der Masse der Hohlkugel gelegen, so ist sein Potenzial:

$$P = \frac{4\pi\rho}{3R}(R^3 - r_0^3) + 2\pi\rho(r^2 - R^2) \qquad 218$$

und die Anziehung wirkt so, wie wenn die von der durch den Punkt gelegten Kugeloberfläche an innerhalb gelegene Masse der Hohlkugel im Mittelpunkt vereinigt wäre.

Haben wir statt der Hohlkugel eine Vollkugel, so ist $r_0 = 0$ und die drei Formeln, resp. die erste und letzte, gehen über in:

$$P = \frac{4\pi r^3\rho}{3R} = \frac{M}{R} \qquad \text{und} \qquad 219$$

$$P = 2\pi\rho r^2 - \frac{2}{3}\pi\rho R^2 \qquad 220$$

und wir haben in diesem letztern Falle die Gleichung:

226 $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

2) Potential des Ellipsoids

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

für einen Punkt $P(x\,y\,z)$ innerhalb desselben.

243 $$P = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s+a)(s+b)(s+c)}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a+s} - \frac{y^2}{b+s} - \frac{z^2}{c+s} \right\}$$

wo $$s = c\,tg^2(\varphi)$$

also $$ds = 2c\,tg\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

wo φ das Complement der Breite für gewöhnliche Polarcoordinaten.

3) Für das abgeplattete Rotationsellipsoid findet man:

$$P = a\pi c \int_0^{\tilde{}} \frac{ds}{(s+a)\sqrt{s+c}} \left\{ 1 - \frac{x^2+y^2}{a+s} - \frac{z^2}{c+s} \right\}$$

wo a und c die Halbaxen des rotierenden Ellipse.

d.h. wenn in jenem Punkte (a) die Tangente der x-Axe parallel, also ihr Neigungswinkel mit derselben gleich Null ist.

Wollen wir also die Werthe von x bestimmen, für welche eine Funktion $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, so bestimmen wir einfach die Wurzeln a der Gleichung

$$f'(x) = 0$$

Durch Einsetzen derselben in $y = f(x)$ erhalten wir dann die Maximal- oder Minimalwerthe der Funktion $f(x)$ selbst; sie wird ein Maximum, wenn

$$f''(a) < 0.$$

ein Minimum, wenn:

$$f''(a) > 0$$

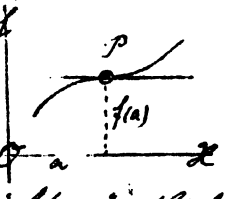
Wäre aber

$$f''(a) = 0$$

hingegen

$$f'''(a) \gtrless 0$$

so hätten wir für $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum; die Kurve besäße im Punkte (a) eine der x-Axe parallele Wendetangente.



Die Ableitungen einer Funktion von $f(x)$ können für $x = a$ nicht sämtlich verschwinden, außer wenn $f(x)$ eine con-

stante Größe ist.

Satz: Ist die $n$te Ableitung $f^{(n)}(x)$ einer Funktion $f(x)$ die erste Ableitung, welche für $x = a$ von Null verschieden ist, so ist $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, wenn n eine gerade Zahl ist, und zwar ein Maximum, wenn:

$$f^{(n)}(a) < 0$$

und ein Minimum, wenn:

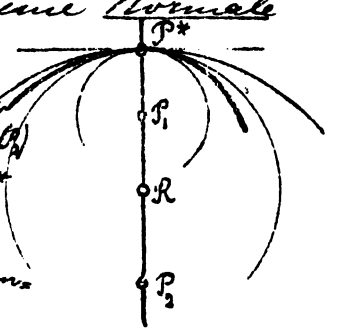
$$f^{(n)}(a) > 0$$

hingegen keines von beiden, aber eine Wendestelle, wenn n eine ungerade Zahl ist.

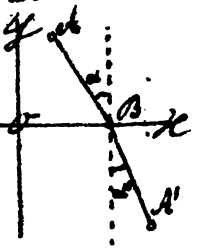
Nach Anwendung dieses Satze gelangen wir zur Lösung folgender

Beispiele:

1) Der Abstand eines gegebenen Punktes (a, b) von den Punkten einer Kurve wird ein Maximum oder Minimum, wenn die Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkt eine Normale der Kurve ist, und zwar haben wir ein Maximum, wenn der gegebene Punkt P und der Kurvenpunkt P^* auf der Normalen zu verschiedenen Seiten des Krüm-



mung mittelpunktes R der Kurve für den betreffenden Punkt P* liegen, ein Minimum hingegen, wenn sie zu gleichen Seiten desselben liegen. Für den Krümmungsmittelpunkt selbst ist der Abstand weder ein Maximum noch ein Minimum.



2) Hat ein Punkt in einem Medium oberhalb der x-Axe eine Geschwindigkeit c und unterhalb derselben in einem zweiten Medium die Geschwindigkeit c', so gelangt er von einem Punkte A im ersteren zu einem Punkte A' im zweiten Medium in der möglich kürzesten Zeit, wenn

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{c}{c'} = n \quad ,$$

6

d.h. wenn das Verhältniss der Sinus der Einfallswinkel gleich dem der Geschwindigkeiten ist, also für dieselben 2 Medien constant ist.

3) Die Schenkel eines rechten Winkels schneiden von einer durch einen gegebenen Punkt P gehenden Geraden ein möglich kürzestes Stück ab, wenn für die Winkel der Geraden mit den beiden Schenkeln folgende Relation besteht:

$$-\frac{f_{11}}{f_2} < 0 \qquad \text{für } x = a,$$

soll es ein Minimum sein, so muss

$$-\frac{f_{11}}{f_2} > 0 \qquad \text{für } x = a.$$

Haben wir eine Funktion mehrer Variabler

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

so wird diese ein Maximum oder Minimum für das Werthesystem:

$$x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2 \quad x_3 = a_3 \ldots \quad x_n = a_n,$$

wenn für diese Werthe

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \; ; \ldots \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Für die weitere Untersuchung, ob in diesem Falle ein Maximum oder ein Minimum eintrete, beschränken wir uns auf die Funktionen zweier und dreier Variabler.
Damit eine Funktion zweier Variabler

$$z = f(x, y)$$

für $x = a$ und $y = b$ ein Maximum oder Minimum wird, ist nothwendig, dass für diese Werthe

$$f_1 = 0 \quad \text{und} \quad f_2 = 0$$

eingegangen:

und, zwar wird sie ein Maximum, wenn für dieselben Werthe

$$f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} < 0$$

sie wird hingegen ein Minimum, wenn für jene Werthe:

$$f_{11} > 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} > 0$$

Relative Maxima und Minima.

Ist eine Funktion

$$z = f(x,y)$$

gegeben, und wollen wir die Werthe bestimmen, für welche sie ein Maximum oder Minimum wird, wenn diese Werthe noch der Bedingungsgleichung

$$g(x,y) = 0$$

genügen sollen, so dient uns die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

nebst der gegebenen:

$$g(x,y)=0$$

zur Bestimmung der beiden Werthe von x und y;

oder

statt die Functionaldeterminante gleich Null zu setzen, können wir auch zur gegebenen Gleichung:

$$z(x,y)=0$$

noch die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

hinzufügen und daraus x, y und λ bestimmen, für welche Werthe die Function $z=f(x,y)$ ein Maximum oder Minimum wird.

Haben wir eine Gleichung dreier Variabler

$$u=f(x,y,z)$$

und dazu die Bedingungsgleichung:

$$g(x,y,z)=0$$

so berechnen wir die Werthe von x, y & z, für welche u ein Maximum oder Minimum werden soll und welche noch zugleich jener gegebenen Bedingungsgleichung genügen müssen, aus den Gleichungen:

$$\underline{g(x,y,z)=0} \qquad \&$$

& $\begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ g_1 & g_3 \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ g_2 & g_3 \end{vmatrix} = 0$

wo

$$f_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \; ; \; f_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \; ; \; f_3 = \frac{\partial u}{\partial z}$$

und

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x} \; ; \; g_2 = \frac{\partial g}{\partial y} \; ; \; g_3 = \frac{\partial g}{\partial z}$$

oder aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1) \quad g(x,y,z) = 0 \\ &2) \quad f_1 + \lambda g_1 = 0 \\ &3) \quad f_2 + \lambda g_2 = 0 \\ &4) \quad f_3 + \lambda g_3 = 0 \end{aligned}$$

33

, wo dann auch noch λ eliminirt werden muss und kann.

Sind uns statt einer Bedingungsgleichung, zwei solche gegeben,

$$\underline{g(x,y,z)=0} \quad \& \quad \underline{h(x,y,z)=0} \;,$$

welchen die Werthe x, y, z genügen müssen, die die Funktion:

$$u = f(x,y,z)$$

zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, so berechnen wir diese Werthe aus den Gleichungen:

Determinantentheorie.

D. zweiten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

D. dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

Auflösungsschema:

Die Glieder der Diagonalen von oben links bis unten rechts sind positiv, die jenigen der anderen Diagonalen, von oben rechts bis unten links, sind negativ.

Ordnung der Determinante nach Unterdeterminanten nach den Gliedern einer Colonne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Determinante n^{ten} Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sie wird entwickelt in dem man aus dem Diagonalglieder:

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$

die weitern Glieder bildet durch Fest-

halten der ersten und Permutiren der zweiten Indices (oder umgekehrt) die gerade oder ungerade Anzahl der Vertauschungen derselben in Bezug auf das (positive) Diagonalglied entscheidet, ob das betreffende Glied das positive oder negative Zeichen habe.

Ordnung nach Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \pm a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \quad 5$$

Man ordnet eine Determinante nach den Elementen einer Reihe oder auch Colonne nach Unterdeterminanten, indem die Horizontal- & Vertikalreihe durchstreicht, in welche das betreffende Element gehört und die übrig bleibenden Glieder als neue (Unter-) Determinante dem Element als Faktor beisetzt. Über das Zeichen dieses Summanden od. dieses Gliedes der Entwicklung entscheidet der Ausdruck

$$(-1)^{k\lambda} \quad 6$$

wo k die Nummer der Reihe und λ die der Colonne, in welche das betreffende Element gehört. (Im Falle unseres obigen Beispiels ist also k = 1 ;)

Bezeichnen wir den Werth der ganzen Determinante mit D, so finden wir auch für jedes Glied die zugehörige Unterdeterminante nach der allgemeinen Formel

$$\frac{\partial D}{\partial a_{kk}} = A_{kk}$$

wo also A_{kk} die zum Elemente a_{kk} gehörige Unterdeterminante bedeuten soll.

Die vollständig entwickelte Determinante n^{ten} Grades hat

$$n!$$

Glieder.

Eine Determinante ändert das Vorzeichen durch das einmalige Vertauschen zweier Parallelreihen oder -Colonnen.

Eine Determinante bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man die Horizontalreihen zu Verticalreihen macht und umgekehrt.

Eine Determinante wird mit einem constanten Factor multiplizirt oder dividirt, indem man eine Horizontalreihe oder eine Verticalreihe mit demselben multiplizirt oder dividirt.

Sind in einer Determinante zwei

parallele Reihen oder Colonnen einander gleich oder sind ihre entsprechenden Glieder alle einander proportional, so hat die Determinante den Werth Null.

Jede Determinante ist eine lineare und homogene Funktion der Elemente einer Reihe oder Colonne.

Eine Determinante bleibt ungeändert wenn man die mit einem constanten Faktor multiplizirten Elemente einer Reihe oder Colonne zu den entsprechenden einer parallelen addirt oder subtrahirt.

Das Produkt zweier Determinanten n^{ten} Grades lässt sich wieder als eine solche darstellen. Die Elemente derselben sind die Summen der Produkte der Elemente je einer Reihe der einen gegebenen mit den entsprechenden je einer Reihe der anderen gegebenen Determinante: z.B. für eine D. 3. Gr.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}) & (a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33}) \\ (a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}) & (a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}) & (a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33}) \\ (a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}) & (a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}) & (a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33}) \end{vmatrix}$$

Haben wir eine Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$$

und bilden wir daraus die adjungirte D., d.i. die Determinante der Unterdeterminanten derselben:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \mathfrak{D} ,$$

wo also z.B. A_{11} die Unterdeterminante von a_{11} in der Determinante d, d.h.:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{ist,}$$

so haben wir den Satz:

Die Unterdeterminante von $A_{\alpha\beta}$ in dieser neuen Determinante $\mathfrak{D}$ ist gleich der ursprünglichen Determinante d multiplizirt mit dem Elemente $a_{\alpha\beta}$ von welchem in dieser (letztern) Determinante $A_{\alpha\beta}$ die Unterdeterminante ist; es ist also z.B. hier

9
$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = a_{11} . d$$

Ferner existirt der Satz:

Die adjungirte Determinante der Determinante dritten Grades ist gleich dem Quadrate der ursprünglichen:

$$\mathfrak{D} = d^2$$

Dieser Satz lässt sich für eine Determinante n^{ten} Grades folgendermaßen

verallgemeinern:

Die adjungirte Determinante D_n einer Determinante n^{ten} Grades d_n ist gleich der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz dieser letztern; d. h. es ist

$$D_n = d_n^{\,n-1} \qquad 10$$

Wichtig sind folgende Identitäten:

1) $$\begin{vmatrix} (a+a') & (b+b') \\ (c+c') & (d+d') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \qquad 11$$

2) $$\begin{vmatrix} (a\alpha+b\beta+c\gamma) & (a\alpha'+b\beta'+c\gamma') \\ (a'\alpha+b'\beta+c'\gamma) & (a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma') \end{vmatrix} = \qquad 12$$

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

Setzen wir darin

$$\alpha = a \,;\quad \beta = b \,;\quad \gamma = c$$

& $$\alpha' = a' \,;\quad \beta' = b' \,;\quad \gamma' = c'$$

so erhalten wir:

3) Die LaGrange Identität:

$$\begin{vmatrix} (a^2+b^2+c^2) & (aa'+bb'+cc') \\ (aa'+bb'+cc') & (a'^2+b'^2+c'^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 \qquad 13$$

oder

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2 = (bc'-b'c)^2 + (ca'-c'a)^2 + (ab'-a'b)^2 \qquad 13'$$

Von fernerer Wichtigkeit ist die Identität:

$$\sin(ab)\cdot\sin(a'b') = \begin{vmatrix} \cos(aa') & \cos(ab') \\ \cos(ba') & \cos(bb') \end{vmatrix} \qquad 14$$

wo a, b & a', b' irgend [illegible]

Anwendungen der Determinantensätze: Auflösung eines Systems von n von einander unabhängigen Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten.

Die Gleichungen seien:

$$\begin{aligned}
&1)\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots a_{1n}x_n = c_1\\
&2)\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots a_{2n}x_n = c_2\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&n)\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots a_{nn}x_n = c_n
\end{aligned}$$

Wir finden irgend eine Unbekannte x_k nach folgender Gleichung:

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Der Nenner ist die Determinante sämtlicher Coefficienten der Unbekannten. Die Determinante im Zähler wird aus dieser Determinante gebildet, in dem man

an Stelle der Elemente der k^{ten} Colonne der Reihe nach die constanten Glieder der Gleichungen $c_1\ c_2 \ldots c_n$ einsetzt.

Haben wir $(n+1)$ Gleichungen mit n Unbekannten im ersten Grade:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1} = 0 \quad (1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1} = 0 \quad (2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1} = 0 \quad (n$$
$$a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1} = 0 \quad (n+1$$

so muss, damit sie alle gleichzeitig neben einander bestehen können, dass also jede von ihnen Folge der n übrigen ist, die Determinante der sämmtlichen Coefficienten dieser $(n+1)$ Gleichungen verschwinden, d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n,2} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Zur Bestimmung der n Unbekannten würden wir nun z.B. die n ersten Gleichungen verwenden.

Haben wir n homogene Gleichungen ersten Grades mit $n+1$ Unbekannten,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} &= 0\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1}x_{n+1} &= 0
\end{aligned}$$

so können wir die Verhältnisse derselben bestimmen nach folgender Kettenproportion

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n : x_{n+1} =$$

$$\left|\begin{matrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n+1} \\ \cdot & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n+1} \end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1,n+1} \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{n,n+1} \end{matrix}\right| : \dots : \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right|$$

16

Diese Determinanten n^{ten} Grades werden gebildet aus den Coefficienten der n Gleichungen, die der k^{ten} Unbekannten entsprechende Determinante enthält alle Coefficienten mit Ausnahme der Coefficienten $a_{1k}, a_{2k} \dots a_{nk}$ dieser Unbekannten selbst.

Sind n homogene Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so können diese nur gleichzeitig bestehen, wenn die Determinante ihrer Coefficienten verschwindet. Ist dieß der Fall, so kann man die Verhältnisse der Unbekannten bestimmen.

Theorie
der gewöhnlichen
Differentialgleichungen.

II. Theil.

Unter einer Differenzialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen einer unabhängigen Variablen x, einer davon abhängigen Variablen y und den Ableitungen $y', y'', \ldots$ derselben nach der unabhängigen Variablen; z. B.

$$F(x, y, y', y'' \ldots) = 0$$

wo

$$y = \varphi(x)$$
$$y' = \varphi'(x)$$
$$y'' = \varphi''(x)$$
$$\ldots\ldots$$

Eintheilung der Differenzialgleichungen nach Ordnung und Grad:

Eine Differenzialgleichung n^{ter} Ordnung ist eine solche, in welcher die höchste in der Gleichung vorkommende Ableitung von y eine Ableitung n^{ter} Ordnung dieser Variablen ist:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Eine Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung wird eine solche vom n^{ten} Grade genannt, wenn die höchste vorkommende Potenz der höchsten (n^{ten}) Ableitung von y die m^{te} Potenz ist:

$$A + By^{(n)} + Cy^{(n)2} + Dy^{(n)3} + \ldots + Ky^{(n)m} = 0,$$

wo $A, B, C, D \ldots K$ Funktionen beliebigen Grades von $x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ sind.

Die Aufgabe ist: eine solche Funktion

$$y = f(x),$$

das Integral der Differenzialgleichung, zu bestimmen, welche mit ihren Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ in die gegebene Gleichung

$$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$$

eingesetzt, dieselbe identisch befriedigt. Ist es nicht möglich das Integral $y = f(x)$ in expliziter Form zu berechnen, so nennt man eine Gleichung zwischen x und y

$$\varphi(x, y) = 0,$$

in welcher y (wenn wir dasselbe aus der Gleichung ausgerechnet denken) das der Differenzialgleichung genügende Integral ist, die Integralgleichung der Differenzialgleichung.

Das Integral einer Differenzialgleichung enthält stets willkürliche Constante,

deren Zahl mit der Ordnung der Differenzialgleichung übereinstimmt. Welche Werthe wir denselben auch geben mögen, immer genügt das Integral der Differenzialgleichung.

Die umgekehrte Aufgabe ist, die Differenzialgleichung eines Integrales zu bestimmen. (Sie wird von der Ordnung sein, welche die Zahl der in der Integralgleichung vorkommenden willkürlichen Constanten angiebt.) Zu diesem Zwecke differenziren wir das Integral:

$$y = f(x, h, \mu, \nu \ldots \varkappa),$$

welches n willkürliche Constante $h, \mu, \nu \ldots \varkappa$ enthält, n-mal nach x und erhalten so n Gleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= f'(x, h, \mu \ldots) \\ y'' &= f''(x, h, \mu \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x, h, \mu \ldots), \end{aligned}$$

haben also mit der gegebenen $(n+1)$ Gleichungen, aus welchen man durch Elimination der n willkürlichen Constanten die Differenzialgleichung n^{ter} Ordnung erhält:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Allgemeine Gestalt einer solchen:

$$A + By' + Cy'^2 + Dy'^3 + \ldots + My'^m = 0$$

$= A, B, C \ldots M$ Funktionen von x und y.

Setzt das Integral

$$f(x,y,\lambda) = 0$$

so erhalten wir, falls wir die Gleichung als Kurvengleichung interpretieren, für jedes λ eine andere Kurve und wir können für jeden Punkt die Richtung, respektive die Richtungen (je nach dem wir eine Gleichung ersten oder höheren Grades haben) der durch den Punkt (x,y) gehenden Kurve resp. Kurven angeben, in dem wir in die Differenzialgleichung die Coordinaten des Punktes einsetzen & p ausrechnen; denn es ist

$$p = \frac{dy}{dx} = 0$$

Ist uns $y = f(x,\lambda)$ (1)

gegeben, so finden wir die Differenzialgleichung dieses Integrals durch Bildung von

$$p = y' = f'(x,\lambda) \quad (2)$$

und Elimination von λ aus beiden Gleichungen.

Haben wir hingegen die Integralgleichung

$$f(x,y,\lambda) = 0 \quad (1)$$

so finden wir

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p = 0 \qquad (\varepsilon)$$

und erhalten die Differenzialgleichung durch Elimination von k aus f und φ.

Wir können auch aus $f(x,y,k) = 0$ k berechnen:

$$k = g(x,y)$$

und erhalten durch Differenziation von $g(x,y)$ nach x:

$$dk = 0 = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

oder $$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} p = 0$$

als gesuchte Differenzialgleichung $\varphi(x,y,k) = 0$.

Differenzialgleichungen erster Ordnung ersten Grades.

$$A + Bp = 0$$

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} = 0$$

Jede Diff.-gleichung erster Ordnung und ersten Grades kann auf diese Form gebracht werden.

Separirte Differenzialgleichungen:

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

wo $A = f(x)$ & $B = f(y)$

aus denselben erhält man die Integralgleichung durch unmittelbare Integration.

$$\int A\,dx + \int B\,dy = C$$

wo C die willkürliche Constante. Für jeden Werth derselben ein allgemeines Integral erhalten wir ein partikuläres Integral.

Ist eine geordnet, d.h. auf obige Form

gebrachte Diff.-gleichung ersten Ordn. n Grades nicht separirt, so kann sie nicht gleich integrirt werden. Für die Integration hat man dann zwei Methoden:

A) Die Separation,

B) Die Multiplikation.

A) Separation.

Sie geht darauf hinaus, die Variablen zu separiren, um dann durch unmittelbare Integration den Zweck zu erreichen.

I. Klasse.

1) In der Diff.-gleichung

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

sind A und B homogene Funktionen gleichen Grades von x und y, so dass man schreiben kann:

$$A = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$B = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

so dass die Gleichung lautet:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

wir setzen alsdann

$$\frac{y}{x} = z \quad \text{also} \quad y = xz \quad \text{folgl.}$$

$dx = dx$ aber $dy = x\,dz + z\,dx$,

also haben wir:

$$\varphi(z)\,dx + \psi(z)\{x\,dx + z\,dx\} \quad \text{oder}$$

$$dx\{\varphi(z) + z\,\psi(z)\} + dz \cdot x\,\psi(z) \quad \text{also}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)} = 0 \quad ,$$

wodurch die Variablen separirt sind.
Nach der Integration hat man an Stelle
von z wieder $\frac{y}{x}$ zu setzen.

2) In der Differenzialgleichung:

$$A\,dx + B\,dy = 0 \qquad \text{ist}$$

$$\underline{A = ax + by + c}$$
$$\underline{B = a'x + b'y + c'}$$

dann setzen wir

a) $x = \alpha + \xi \qquad y = \beta + \eta \qquad$ also
$dx = d\xi \qquad dy = d\eta$

und erhalten:

$$(a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c)\,d\xi + (a'\xi + b'\eta + a'\alpha + b'\beta + c')\,d\eta = 0$$

und durch die Bestimmung

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0 \\ a'\alpha + b'\beta + c' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{woraus}$$

$$\alpha = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

haben wir die Gleichung auf der vorigen Seite
ge Art mit homogenen gleichgradigen
Coefficienten zurückgeführt;

oder

b) wir setzen:

$$ax + by + c = \xi \qquad \text{und}$$
$$a'x + b'y + c' = \eta \qquad \text{also}$$
$$d\xi = a\,dx + b\,dy$$
$$d\eta = a'dx + b'dy \qquad \text{woraus}$$

$$dx = \frac{b'd\xi - bd\eta}{ab' - a'b} \qquad \text{und} \qquad dy = \frac{-a'd\xi + ad\eta}{ab' - a'b}$$

und erhalten durch Einsetzen:

$\xi\{b'd\xi - bd\eta\} + \eta\{-a'd\xi + ad\eta\} = 0$ oder

$d\xi\{b'\xi - a'\eta\} + d\eta\{-b\xi + a\eta\} = 0$

wodurch die Gleichung ebenfalls auf eine der vorigen direct reducirt ist. Nach vollzogener Integration, ersetzen wir ξ und η wieder durch ihre Werthe. Diese beiden Verfahren werden illusorisch, wenn

$$ab' - a'b = 0$$ so

dass $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$ also

$$a = a'k \quad \text{und} \quad b = b'k \quad \text{d.h.}$$

$$\{a'x + b'y\} = k\{ax + by\}$$

Wir setzen nun in diesem Falle:

$$ax + by = z$$ also

$$a'x + b'y = kz$$ also

$y = \frac{z - ax}{b}$ folgt. $dy = \frac{dz - adx}{b}$;

wir setzen ein, ordnen und erhalten:

$$dx + \frac{kz + c'}{(b - ak)z + bc - ac'} dz = 0$$

welche Gleichung nun separirt ist.

II. Klasse. Lineare Diff=gleichungen.

Eine Diff-gleichung heißt linear in Bezug auf y und seine Ableitungen (in Bezug auf x ist sie beliebig), wenn die Glieder alle nur in der ersten Potenz vorkommen und hat also allgemein die Gestalt:

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + P_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = Q$$

wo $P_n, P_{n-1} \ldots P_1, P_0, Q$ beliebige Funktionen von x.

Ist Q gleich Null, so heißt die Gleichung eine reduzirte sonst aber eine complete.

Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung haben die Gestalt:

$$y' + Py = Q \qquad \text{resp.}$$
$$P_1 y' + P_0 y = Q \qquad \text{also}$$
$$(P_0 y - Q)dx + P_1 dy = 0$$

1) Haben wir die reduzierte Gleichung

$$y' + Py = 0$$

so lautet das Integral:

$$y = c \cdot e^{-\int P dx}$$

2) Haben wir die complete Gleichung:

$$y' + Py = Q$$

so lautet das Integral:

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ c + \int Q \cdot e^{\int P dx} dx \right\}$$

3) Die Gleichung

$$y' + Py = Qy^n$$

geht in die reduzirte lineare über, wenn $n = 1$; sie geht in die complete über, wenn $n = 0$. Die Integralgleichung derselben lautet:

$$y = z \cdot e^{-\int P dx}$$

wo z berechnet wird aus:

$$\int \frac{dz}{z^n} = \int Q \cdot e^{(1-n)\int P dx} dx$$

Wir können die Gleichung auch durch die Substitution

$$z = \frac{y^{1-n}}{1-n}$$

reduzieren auf die complete lineare Differenzialgleichung:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) z P = Q \,,$$

wo nach erfolgter Integration für z wieder seinen Werth zu setzen ist.

B. Multiplikation.

Haben wir eine Differenzialgleichung:

$$A dx + B dy = 0$$

wo A und B Functionen von x und y, so ist sie das <u>vollständige Differenzial</u>

$$du = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

einer Function u von x und y (wo also $A = F(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ & $B = G(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$.)

wenn

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$ ist.

Ist diese Bedingung (<u>Integrabilitätsbedingung</u>) <u>erfüllt</u>, so können

wir die Diff.-Gleichung integriren nach folgenden Methoden:

1) Wir differenziiren die Gleichung

$$u = \int A\,dx + \varphi(y) = c \qquad (1$$

nach y und erhalten (: Bei der Bestimmung des Integrals $\int A\,dx$ wird y als constant betrachtet :) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = B = \frac{\partial\{\int A\,dx\}}{\partial y} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

woraus

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = B - \frac{\partial\{\int A\,dx\}}{\partial y} \qquad (2$$

Aus dieser Gleichung können wir durch Integration $\varphi(y)$ bestimmen und erhalten schließlich durch Einsetzen dieses Werthes in der Gleichung (1 die gesuchte Integralgleichung.

2) Wir machen den Ansatz:

$$u = \int_a^x F(x,y)\,dx + \int_b^y G(a,y)\,dy = c$$

wo a, b und c beliebige Größen sind; gewöhnlich setzt man der Einfachheit halber $a = 0$; doch manchmal sind andere Werthe für a noch einfacher für die Rechnung. Beim ersten Integral wird natürlich y als constant betrachtet. $G(a,y)$ geht aus $B = G(x,y)$ hervor, dass man an Stelle von x in dieser Function die Grenze a des ersten Integrals setzt.

Ist nun aber die Differenzialgleichung

$$A dx + B dy = 0$$

kein vollständiges Differenzial, d. h. ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, so kann sie doch stets durch Multiplikation mit einem integrirenden Faktor.

$$M = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{A} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{B}$$

zu einem vollständigen Differenziale gemacht werden. Solcher Faktoren existiren immer unendlich viele, abgesehen von denjenigen, welche durch Multiplikation eines solchen mit einem constanten Faktor hervorgehen.

Der Quotient zweier beliebiger integrirender Faktoren ist stets eine Funktion von u, d. h. gleich einer willkürlichen Constanten (und die dadurch gegebene Gleichung ist also die gesuchte Integralgleichung!) — ein Satz, der bewiesen wird mit Hülfe eines andern Satzes:

Ist $u = \varphi(x,y)$ und $v = \varphi^*(x,y)$, so ist v allein Funktion von u, d. h

$$v = \varphi(u)$$

wenn die Funktionaldeterminante verschwindet, d. h. wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Haben wir

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

wo A und B homogene Funktionen gleichen Grades von x und y, so ist der integrirende Faktor:

$$M = \frac{1}{Ax + By}.$$

Die obige Gleichung wird also durch Multiplikation mit demselben zu einem vollständigen Differenziale, kann nach den beiden angegebenen Methoden integrirt werden.

Eine lineare Diff.-gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

wird (sei Q gleich Null oder nicht) zu einem vollständigen Differenziale gemacht durch Multiplikation mit

$$M = e^{\int P dx}$$

Für den Ausdruck:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0\,,$$

wo P, Q und R Funktionen von x, y, z sind, genügt es, um ein vollständiges Differenzial zu sein, noch nicht, dass die mit einem Faktor M multiplizirten Coeffizienten folgende Werthe haben:

$$MP = \frac{du}{dx}\,;\quad MQ = \frac{du}{dy}\,;\quad MR = \frac{du}{dz}\,;$$

es muss auch noch:

$P(Q_3 - R_2) + Q(R_1 - P_3) + R(P_2 - Q_1) = du$

sein, wo z.B. Q_3 die partielle Ableitung von Q nach y, ebenso mit den übrigen.

Allgemeine Diff=gleichung erster Ordnung und beliebigen Grades.

Diff=gleichung:

$$F(x, y, p) = 0$$

Integralgleichung:

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

Integral $y = \varphi(x, \alpha)$

Geben wir der willkürlichen Constanten α einen bestimmten Werth α_0, so ist

$$f(x, y, \alpha_0) = 0$$

eine partikuläre Integralgleichung, &

$$y = \varphi(x, \alpha_0)$$

ein partikuläres Integral.

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

bedeutet ein Kurvensystem von unzählig vielen Kurven, für jedes bestimmte α eine bestimmte desselben. Diese Kurven werden von einer andern Kurve, der Enveloppe des Systems umhüllt, deren Gleichung lautet:

$$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

wo jedoch noch α mit Hülfe der ge-

gebenen Gleichung

$$f(x,y,\alpha) = 0$$

zu eliminiren ist.

Die Enveloppe berührt alle Kurven des Systems. Sie ist der Ort der Schnittpunkte ganz unendlich naher Kurven und hat in denselben mit denselben die nämliche Tangente. Die Gleichung der Enveloppe genügt der allgemeinen Differenzialgleichung, ist also auch ein Integral, doch wird sie aus dem allgemeinen Integral durch Variation der willkürlichen Constanten nicht erhalten; man nennt sie daher ein singuläres Integral der allgemeinen Differenzialgleichung.

Das singuläre Integral einer Differenzialgleichung wird erhalten:

1/ durch Differenziation der allgemeinen Integralgleichung $f(x,y,\alpha) = 0$ nach der willkürlichen Constanten

$$\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

und Elimination von α mit Hülfe der allgemeinen Integralgleichung.

2/ Durch Differenziation der Differenzialgleichung

$$F(x,y,p) = 0$$

nach p:

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = 0$$

und Elimination von p mit Hülfe der ersten Gleichung $F(x,y,p)=0$;
3) durch Nullsetzen des reciproken integrirenden Faktors:

$$\frac{1}{M}=0$$

wenn nämlich die allgemeine Diff.-gleichung lautet:

$$A\,dx+B\,dy=0$$

wo A & B Funktionen von x und y.

Integration v. Diff.-gleichungen I. Ordnung.

$$p=\frac{dy}{dx}\;;\quad dy=p\,dx\;;\quad dx=\frac{dy}{p}$$

1) Die Diff.-gleichung enthält blos p:

$$F(p)=0$$

Man löse die Gleichung nach p auf:

$$p=c$$
$$dy=c\,dx$$
$$y-\beta=cx$$

wo β die willkürliche Constante.
2) Es kommt in der Diff.-gleichung neben p nur noch x vor:

$$F(x,p)=0$$

a) man löse nach p auf:

$$p=f(x)$$
$$dy=f(x)\,dx$$
$$y=\int f(x)\,dx+\beta$$

wo β die will. Const.

b) man löse nach x auf:

$$x = g(p) \qquad \text{(6 also}$$
$$dx = g'(p)\,dp$$
$$\frac{dy}{p} = g'(p)\,dp \qquad \text{(6a}$$
$$dy = p\,g'(p)\,dp$$
$$\underline{y = \int p\,g'(p)\,dp + \beta} \qquad \text{(a}$$

Aus 1) und 2) wird p eliminiert. β ist die willk. Const.

c) Kann man die Gleichung schreiben:

$$x = f(t) \quad \& \quad p = g(t) \qquad \text{(1,}$$

so folgt

$$dy = g(t)f'(t)\,dt$$
$$\underline{y = \int g(t)f'(t)\,dt + \beta} \qquad \text{(2}$$

Elimination von t aus 1) und 2).

3) Die Diff.-gleichung enthält blos p und y:

$$F(y,p) = 0$$

a) man löse nach p:

$$p = f(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$
$$dx = \frac{dy}{f(y)}$$
$$\underline{x = \int \frac{dy}{f(y)} + \beta}$$

b) man löse nach y:

$$y = g(p) \qquad \text{(6}$$
$$dy = g'(p)\,dp$$
$$dx = \frac{g'(p)\,dp}{p}$$

$$x = \int \frac{g'(p)\,dp}{p} + \beta \qquad (2$$

Elimination von p aus 1) und 2)

c) Kann man setzen:

$$y = f(t) \quad \text{u.} \quad p = g(t) \quad , (1$$

so folgt $p\,dx = f'(t)\,dt$

$$dx = \frac{f'(t)\,dt}{g(t)}$$

$$x = \int \frac{f'(t)\,dt}{g(t)} + \beta \qquad (2$$

Elimination von t aus 1) und 2)

Integration irgend einer Diff-gleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, p) = 0$$

Man sucht sie auf irgend eine Weise auf die Form zu bringen:

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

um sie alsdann nach früherm Methoden weiter zu behandeln.

a) Man löse sie, wenn es möglich ist, nach p auf:

$$p = f(x, y)$$

$$dy = f(x, y)\,dx$$

$$f(x, y)\,dx - dy = 0$$

b) Man kann sie auch nach y auflösen:

$$y = g(x, p)$$

$$p\,dx - dy = \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial p}\,dp$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial z}{\partial h}\, dp = 0$$

Dies ist eine Gleichung, welche nur Rein p mehr enthält. Hat man sie nach früher gegebenen Methoden integrirt, so eliminirt man p mit Hülfe der ursprünglichen Gleichung $y = g(x,p)$

c) Kann man die Gleichung nach x auflösen, haben wir also:

$$x = h(y,p) \qquad \text{so folgt:}$$

$$dx = \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp \qquad \text{also}$$

$$dy = p \frac{\partial h}{\partial y} dy + p \frac{\partial h}{\partial p} dp \qquad \text{oder}$$

$$\underline{\left(p \frac{\partial h}{\partial y} - 1\right) dy + p \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0} \quad ,$$

aus welcher Gleichung (sie enthält x nicht mehr) p mit Hülfe von $x = h(y,p)$ eliminirt wird nach erfolgter Integration.

d) Wir nehmen zur gegebenen Gleichung:

$$F(x,y,p) = 0 \qquad (1$$

zwei ganz beliebige Funktionen:

$$\varphi(x,y,p) = u \qquad (2$$

$$\psi(x,y,p) = v \qquad (3$$

und können nun aus den drei Gleichungen x, y und p ausrechnen und als Funktionen von u und v darstellen:

$$x = f(u,v) \qquad 1')$$

$$y = g(u,v) \qquad 2')$$

$$p = h(u,v) \qquad 3')$$

Es ist $dy = p\, dx$

Setzen wir die aus 1), 2'), 3') für dx, dy & p folgenden Werthe hier ein, so erhalten wir $\frac{\partial Z}{\partial u}du + \frac{\partial Z}{\partial v}dv = h(u,v)\left\{\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv\right\}$

oder

$$\left\{\frac{\partial Z}{\partial u} - h(u,v)\frac{\partial F}{\partial u}\right\}du + \left\{\frac{\partial Z}{\partial v} - h(u,v)\frac{\partial F}{\partial v}\right\}dv = 0$$

Diese Gleichung enthält nun u und v und kann also nach früher gegebenen Methoden integrirt werden. Ergiebt die Integration:

$$v = X(u,\alpha)$$

wo α die willkürliche Constante, so kann man diesen Werth in 1') & 2') einsetzen:

$$x = f(u, X(u,\alpha)) \quad \& \quad y = g(u, X(u,\alpha)),$$

woraus mit Hülfe von 1) und 2) u und p eliminirt werden können.

---

4) Die Diff-gleichung ist in Bezug auf x und y linear:

$$Px + Qy + R = 0$$

wo P, Q, R Functionen von p sind. Wir lösen nach y auf:

$$y = -\frac{P}{Q}x - \frac{R}{Q}$$

oder kurz

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

also

$$dy = \varphi(p)\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp$$

oder:

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) = -\psi'(p)$$

dies entspricht der linearen Diff-gleichung:

$$P_1\frac{dx}{dp} + P_0 x = Q,$$

welche nach früher gegebenen Regeln folgen-

dermaßen integrirt wird:

$$x = -e^{-\int \frac{\varphi'(p)\,dp}{\varphi(p)-p}} \left(\int \frac{\psi(p)}{\varphi(p)-p} \cdot e^{\int \frac{\varphi'(p)\,dp}{\varphi(p)-p}} dp + \alpha \right)$$

Nach erfolg der Integration wird p mittelst der ursprünglichen gegebenen Gleichung eliminirt.

Clairaut'sche Diff.=gleichung:

$$y = px + \varphi(p)$$

Man erhält daraus das Integral, indem man einfach p mittelst durch die willkürliche Constante α:

$$y = \alpha x + \varphi(\alpha)$$

Das singuläre Integral erhalten wir durch

$$x + \varphi'(p) = 0 \,,$$

woraus p mit Hülfe der gegebenen Gleichung eliminirt wird. Dieses (singuläre) Integral stellt die Enveloppe des durch das allgemeine Integral gegebenen Systems von geraden Linien dar.

Differenzialgleichungen höherer Ordnung.

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Wir bezeichnen die erste Ableitung von y mit p, die zweite mit q, die dritte mit r u.s.w.; es ist dann

$\frac{dy}{dx} = p$ also $dy = p\,dx$ ferner

$\frac{dp}{dx} = q$ " $dp = q\,dx$ "

$\frac{dq}{dx} = r$ " $dq = r\,dx$ u.s.f.

Ferner folgt aus diesen Gleichungen

$$\left\| \begin{array}{l} p\,dp = q\,dy \\ q\,dq = r\,dp \end{array} \right\|$$

u.s.f. —

Bezeichnungen, welche bei den folgenden Regeln, resp. bei deren Herleitung oft verwendet werden.

1) In der gegebenen Gleichung soll nur $y^{(n)}$ vorkommen; dann haben wir also

$$F(y^{(n)}) = 0$$

als gegebene Diff.-gleichung.

Dann lautet das Integral:

$$y = C\frac{x^n}{n!} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n,$$

wo C eine Wurzel der Gleichung:

$$F(y^{(n)}) = 0,$$

wo bei der Auflösung $y^{(n)}$ als Unbekannte betrachtet wird. $C_1\ C_2 \cdots C_n$ sind die n willkürlichen Constanten, so dass das Integral auch geschrieben werden kann:

$$y = c\frac{x^n}{n!} + \varphi(x) \qquad \text{oder}$$

$$c = \frac{(y-\varphi(x))n!}{x^n}$$

wo $\varphi(x)$ eine beliebige ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, deren beliebige Koeffizienten die n willkürlichen Constanten sind. — Da

$$F(y^{(n)}) = 0$$

noch andere Wurzeln hat als c, von denen jede ein partikuläres Integral liefert, so können wir sagen, die Integralgleichungen der Diff.=gleichung $F(y^{(n)}) = 0$ ergeben sich als die gleich Null gesetzten Linearfaktoren der aus dieser letzten Gleichung selbst durch die angegebene Ersetzung von $y^{(n)}$ hervorgehenden neuen Gleichung

$$f\left(\frac{(y-\varphi(x))n!}{x^n}\right) = 0$$

wo $\frac{(y-\varphi(x))n!}{x^n}$ als Variable oder Unbekannte betrachtet wird.

2/ Die Diff.=gleichung enthalte außer $y^{(n)}$ noch x:

$$F(x, y^{(n)}) = 0$$

a/ Wir lösen nach $y^{(n)}$ auf:

$$y^{(n)} = f(x)$$

Es ist dann:

$$y = \int^{(n)} f(x)\,dx^n$$

d. h. wir erhalten das Integral dieser Diff.-gleichung durch n-malige Integration von $f(x)$.

Statt $f(x)$ n-mal zu integrieren, kann man auch folgende Formel anwenden:

$$\int^{(n)} f(x)\,dx^n =$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\Big\{x^{n-1}\int f(x)\,dx - (n-1)x^{n-2}\int x f(x)\,dx +$$

$$+\binom{n-2}{2}x^{n-3}\int x^2 f(x)\,dx - \binom{n-3}{3}x^{n-4}\int x^3 f(x)\,dx +$$

$$+ - \cdots + (-1)^{n-1}\int x^{n-1} f(x)\,dx\Big\}$$

b) Wir lösen nach x auf:

$$x = f(y^{(n)})$$

Wir zeigen die Methode an einem spez. Falle:

$$x = f(y)$$

nach welchem dieselbe für Gleichungen beliebiger Ordnung erweitert werden kann.

Aus $x = f(y)$ (1 folgt also

$$dx = f'(y)\,dy$$

$\frac{dp}{dx} = q$: $dp = q\,f'(y)\,dy$

$$p = \int q\,f'(y)\,dy + \alpha = h(y) \quad (2$$

$\frac{dy}{dx} = p$: $dy = h(y)\,f'(y)\,dy$

$$y = \int h(y)\,f'(y)\,dy + \beta \quad (3$$

Elimination von q aus 1) und 3).

c) Möglicherweise lassen sich x und $y^{(n)}$ als Funktionen einer dritten unabhängigen Variablen t darstellen; wie dann zu verfahren ist, zeigen wir wieder an zwei spez. Fällen:

1) Aus $\underline{F(x,q)=0}$ folge

$$x=f(t) \quad \& \quad q=g(t) \qquad (1$$

$$dp=q\,dx=q\,f'(t)dt=g(t)f'(t)dt \quad \text{also}$$

$$p=\int g(t)f'(t)dt+\alpha=h(t)$$

$$dy=p\,dx=p\,f'(t)dt=h(t)f'(t)dt \quad \text{also}$$

$$y=\int h(t)f'(t)dt+\beta \qquad (2$$

Elimination von t aus $x=f(t)$ und 2)

2) Aus $\underline{F(x,r)=0}$ folge

$$x=f(t) \quad \& \quad r=g(t) \qquad (1$$

$$dq=r\,dx=g(t)f'(t)dt$$

$$q=\int g(t)f'(t)dt+\alpha=\chi(t)$$

$$dp=q\,dx=\chi(t)f'(t)dt$$

$$p=\int \chi(t)f'(t)dt+\beta=\psi(t)$$

$$dy=p\,dx=\psi(t)f'(t)dt$$

$$y=\int \psi(t)f'(t)dt+\gamma=\varphi(t) \qquad (2$$

Elimination von t aus

$$\left|\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=\varphi(t) \end{array}\right| \quad \&$$

3) Diff=gleichungen von der Form:

$$\underline{F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0}$$

Wir zeigen die Methode am speziellen Falle:

$$F(p,q) = 0$$

Man löse nach q:

$$q = f(p) \qquad (1$$

$dy = q\,dx$ $\qquad dy = f(p)\,dx$

$$dx = \frac{dy}{f(p)} \qquad (1'$$

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + \alpha = \varphi(p) \qquad (2$$

$dy = p\,dx$ $\qquad$ also

$$dy = p\,\frac{dp}{f(p)} \qquad \text{vt. (1'}$$

$$y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + \beta = \psi(p) \qquad (3$$

Elimination von p aus 2) und 3).

---

4) Diff.-gleichungen von der Form:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$$

Spezieller Fall:

$$F(q,y) = 0$$

a) Wir lösen nach q:

$$q = f(y)$$

also $\qquad p\,dp = f(y)\,dy$

folgt. $\qquad \frac{p^2}{2} = \int f(y)\,dy + \beta$

oder $\qquad p = \sqrt{2\int f(y)\,dy + \beta}$

ferner $\qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + \beta}}$

also $\qquad x - \alpha = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + \beta}}$

b) Wir lösen nach y:

$$y = f(q)$$

also $$dy = f'(q)\,dq \qquad (1$$

folgl. $$p\,dp = q f'(q)\,dq$$

$$p = \sqrt{2\int q f'(q)\,dq + \beta}$$

ferner $$dx = \frac{f'(q)\,dq}{\sqrt{2\int q f'(q)\,dq + \beta}}$$

folgl. $$x - \alpha = \int \frac{f'(q)\,dq}{\sqrt{2\int q f'(q)\,dq + \beta}} \qquad (2$$

Elimination von q aus 1) und 2):

c) Wir stellen y und q als Funktionen einer dritten unabhängigen Variablen dar:

$$y = f(t) \quad \text{und} \quad q = g(t)$$

Dann ist: $$p\,dp = g(t) f'(t)\,dt$$

also $$p = \sqrt{2\int g(t) f'(t)\,dt + \beta}$$

und $$dx = \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{2\int g(t) f'(t)\,dt + \beta}}$$

folgl. $$x - \alpha = \int \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{2\int g(t) f'(t)\,dt + \beta}} = \varphi(t)$$

Elimination von t aus

$$\left| \begin{array}{l} y = f(t) \\ x - \alpha = \varphi(t) \end{array} \right| \qquad \text{und}$$

Beispiele:

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$$

Das Integral dieser wichtigen Diff-gleichung lautet:

$$y = A \sin\left(\frac{x}{a}\right) + B \cos\left(\frac{x}{a}\right)$$

wo A und B die willkürlichen Constanten sind.

2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2}{a^4}$$

Das Integral dieser Gleichung lautet:

$$y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}}$$

wo A und B die willkürlichen Constanten.

---

5) Diff.-gleichungen von der Form:

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)} \ldots y^{(n)}) = 0$$

welche also y und die Ableitungen da von bis zur m^{ten} nicht enthält. Sie wird durch die Substitution:

$$y^{(m)} = z$$
$$y^{(m+1)} = z'$$
$$y^{(m+2)} = z''$$
$$\cdots$$
$$y^{n} = z^{(n-m)}$$

auf eine Gleichung niedriger Ordnung reduzirt:

$$F(x, z, z', z'', \ldots z^{(n-m)}) = 0$$

δ) Diff-gleichungen, welche x nicht enthalten.

$$F(y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$$

Die Ordnung wird um 1 erniedrigt durch folgendes Verfahren:

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dy''}{dy} = p\frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dy}$$

$$= p\left\{p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right\}$$

Durch ähnliches Verfahren erhält man:

$$y'''' = p\left\{p^2\frac{d^3p}{dy^3} + 4p\frac{dp}{dy}\cdot\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^3\right\}$$

etc. etc.

Durch Einsetzen dieser Werthe erhält man eine Gleichung, in der y die unabhängige, p die abhängige Variable ist, und deren Ordnungszahl gegenüber der gegebenen um 1 niedriger ist.

ζ) Diff.-gleichungen, welche in Bezug auf $y, y', y'' \ldots y^{(n)}$ homogen sind.

Auch hier kann die Ordnung der Gleichung um 1 erniedrigt werden, indem man setzt:

$$y = e^{\int z\,dx}$$

also

$$y' = e^{\int z\,dx}\cdot z = yz$$

ferner

$$y'' = yz' + y'z = yz' + yz^2$$

"

$y'' = yz'' + 3yzz' + yz^3$

etc. etc.

Setzen wir ein, so heben sich in der Gleichung, ihrer Homogenität in Bezug auf y und dessen Ableitungen wegen, alle y weg, und wir erhalten:

$$F\{x, 1, z, (z'+z), (z''+3z'z+z^3) \cdots\} = 0,$$

welche Gleichung wirklich gegenüber der gegebenen um 1 niedriger ist.

Lineare Diff.-gleichungen.

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = Q$$

wo $P_n, P_{n-1}, \ldots P_1, P_0, Q$ beliebige Funktionen von x.

Ist $Q = 0$

so heißt die Gleichung eine reduzirte, sonst aber eine complete.

Das allgemeine Integral der linearen Diff.-gleichung n^{ter} Ordnung hat n willkürliche Constante, welche man durch beliebige Funktionen derselben ersetzen kann. Geben wir ihnen bestimmte Werthe, so erhalten wir ein partikuläres Integral.

Ist y_1 ein partikuläres Integral einer gegebenen Diff.-gleichung, so ist ein beliebiges Vielfaches desselben, auch

wieder ein partikuläres Integral derselben.

Sind y_1 und y_2 zwei partikuläre Integrale, so ist auch $(y_1 + y_2)$ ein solches.

Sind allgemein $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ partikuläre Integrale einer gegebenen Diffgleichung, so ist jede beliebige lineare Combination davon auch wieder ein partikuläres Integral.

Zwei partikuläre Integrale heißen von einander unabhängig, wenn zwischen ihnen keine lineare Gleichung mit constanten von Null verschiedenen Coefficienten besteht, oder, wenn keines aus dem andern durch eine lineare Combination abgeleitet werden kann.

Kennen wir von einer Diffgleichung der n^{ten} Ordnung n von einander unabhängige partikuläre Integrale, so erhalten wir durch eine lineare Combination derselben das allgemeine Integral; die n Coefficienten dieser Combination sind die n willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals.

Eine lineare Diffgleichung hat keine singulären Integrale.

Sind von einer linearen Diffgleichung n^{ter} Ordnung m von einander unabhängige partikuläre Integrale bekannt,

so lässt sich die Ordnung derselben auf (n−m) erniedrigen.

Reduzirte lineare Diff.-gleichung.

1) Die Coefficienten von y und seinen Ableitungen sollen alle constante Zahlen sein:

$a_n \partial_y^n + a_{n-1} \partial_y^{n-1} + a_{n-2} \partial_y^{n-2} + \cdots + a_2 \partial_y^2 + a_1 \partial_y + a_0 y = 0$

Eine solche Gleichung wird integrirt, indem wir die charakteristische Funktion gleich Null setzen, also die charakteristische Gleichung bilden:

$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$,

indem wir in der gegebenen Diff.-gleichung jede Ableitung von y durch die entsprechende Potenz von r ersetzen:

Sind $r_n, r_{n-1} \ldots r_2, r_1$ die von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung, so erhalten wir die partikulären von einander unabhängigen Integrale der gegebenen Diff.-gleichung:

$y_1 = e^{r_1 x}$; $y_2 = e^{r_2 x}$; $y_3 = e^{r_3 x}$; ..

$y_{n-1} = e^{r_{n-1} x}$; $y_n = e^{r_n x}$;

und das allgemeine Integral derselben ist eine beliebige lineare Combination dieser Integrale, deren Coefficienten die willkürlichen Constanten sind.

Ergibt die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln, z.B. r_1 als α-fache und r_2 als β-fache, so sind die von einander unabhängigen partikulären Integrale der gegebenen Diff.-gleichung:

$$y_1 = e^{r_1 x} \quad y_2 = x e^{r_1 x} \quad y_3 = x^2 e^{r_1 x} \ldots y_\alpha = x^{\alpha-1} e^{r_1 x}$$

$$y_{\alpha+1} = e^{r_2 x} \quad y_{\alpha+2} = x e^{r_2 x} \quad y_{\alpha+3} = x^2 e^{r_2 x} \ldots y_{\alpha+\beta} = x^{\beta-1} e^{r_2 x}$$

Die beiden Verfahren (für lauter von einander verschiedener Wurzeln und für mehrfache Wurzeln) sind auch dann noch anzuwenden, wenn die charakteristische Gleichung Paare conjugirt complexer Wurzeln ergibt; z.B. $a \pm ib$. Wir fassen die beiden diesen Werthen entsprechenden partikulären Integrale zusammen zu:

$$y = m e^{(a+ib)x} + n e^{(a-ib)x}$$

(wo m und n die willkürlichen Constanten)

oder: $y = m e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) + n e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))$

$$y = e^{ax}(m+n)\cos(bx) + e^{ax} i(m-n)\sin(bx)$$

Nach dem Satze: Ist $u + iv$ ein Integral einer gegebenen Diff.-gleichung (wo u und v reel), so müssen auch u und v jedes einzeln dieser Diff.-gleichung genügen", haben wir also die beiden von

einander unabhängigen partikulären Integrale (wenn wir die willkürlichen Constanten $(\alpha+\alpha)$ und $i(\alpha-\alpha)$ weglassen)

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= e^{a x}\cos(b x) \\ y_2 &= e^{a x}\sin(b x) \end{aligned}}$$

2) Lineare Diff.-gleichungen von der Form:

$$0 = a_n x^n y^n + a_{n-1} x^{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y$$

Wir bestimmen wieder die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, welche aber diesmal lautet:

$$a_n r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1) + a_{n-1} r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+2) + a_{n-2} r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+3) + \cdots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

Sind also dann $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ die Wurzeln derselben, so lauten die n partikulären von einander unabhängigen Integrale:

$$y_1 = x^{r_1} \quad ; \quad y_2 = x^{r_2} \quad ; \quad y_3 = x^{r_3} \quad ; \quad \ldots \; y_n = x^{r_n}$$

Ergibt die Gleichung mehrfache Wurzeln, ist z. B. r_1 eine α-fache, r_2 eine β-fache, so lauten die denselben entsprechenden Integrale:

$$\begin{array}{llll} y_1 = x^{r_1} & y_2 = x^{r_1}\ln(x) & y_3 = x^{r_1}\ln(x)^2 \cdots & y_\alpha = x^{r_1}\ln(x)^{\alpha-1} \\ y_{\alpha+1} = x^{r_2} & y_{\alpha+2} = x^{r_2}\ln(x) & y_{\alpha+3} = x^{r_2}\ln(x)^2 \cdots & y_{\alpha+\beta} = x^{r_2}\ln(x)^{\beta-1} \end{array}$$

Ergibt die Gleichung Paare conjugirt complexer Wurzeln, z.B. $a \pm ib$, so fassen wir die beiden denselben entsprechenden Integrale x^{a+ib} und x^{a-ib} zusammen:

$$y = mx^{a+ib} + nx^{a-ib}$$

$$y = x^a \{ me^{ib\ell(x)} + ne^{-ib\ell(x)} \}$$

$$y = x^a \{ m(\cos(b\ell(x)) + i\sin(b\ell(x))) + n(\cos(b\ell(x)) - i\sin(b\ell(x))) \}$$

$$y = x^a \{ (m+n)\cos(b\ell(x)) + i(m-n)\sin(b\ell(x)) \}$$

folglich lauten die beiden partikulären Integrale:

$$\underline{y_1 = x^a \cos(b\ell(x))}$$

$$\underline{y_2 = x^a \sin(b\ell(x))}$$

Complete lineare Diff.-gleichungen.

$$\underline{P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = \omega}$$

Ist y_0 ein partikuläres Integral derselben, so lautet das allgemeine Integral derselben:

$$\underline{y = y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n}$$

wo $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$ die n von einander unabhängigen Integrale der der completen entsprechenden reducirten Diff.-gleichung, welche man aus jener erhält,

wenn man ihre linke Seite gleich Null setzt; d.h. Q gleich Null setzt. — $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ sind die willkürlichen Constanten des allgemeinen Integrals.

Satz: Die Differenz irgend zweier Integrale der completten Gleichung ist ein Integral der entsprechenden reducirten Diff.-gleichung.

Ist y_1 ein particuläres Integral der entsprechenden reducirten Diff.-gleichung, einer gegebenen completten, so kann man die Ordnung der letztern um 1 reduzieren durch die Substitution:

$$y = y_1 \int z\,dx \qquad \text{also}$$
$$y' = y_1' \int z\,dx + y_1 z$$
$$y'' = y_1'' \int z\,dx + 2 y_1' z + y_1 z'$$
$$\text{&c.} \quad \text{&c.}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe erhält man eine neue Gleichung in z und seinen Ableitungen; ist daraus z bestimmt, so findet man y mit Hülfe der Substitutionsgleichung; z.B. für eine Diff.-gleichung zweiter Ordnung macht sich die Sache folgendermaßen: es sei

$$y'' + Py' + Qy = R$$

gegeben und y_1 sei ein Integral der entsprechenden reducirten:

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

setzen wir die obigen Werthe für y'', y', y

ein so erhalten wir:

$(y_1' + P y_1' + Q y_1) \int z\,dx + (2y_1' + P y_1) z + y_1 z' = R$, d.h.

$= 0$

$(2y_1' + P y_1) z + y_1 z' = R$,

welche Gleichung für z eine Diff=gleichung ersten Grades um „1" niedriger als die gegebene Ordnung ist. Ist daraus z bestimmt, so finden wir das gesuchte Integral mit Hilfe der Substitutionsgleichung:

$$y = y_1 \int z\,dx$$

durch Einsetzen des gefundenen Werthes von z.

Hat man die Gleichung:

$$P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = Q$$

und sind y_1 und y_2 zwei voneinander unabhängige Integrale der reducirten Gleichung $P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$,

so lautet das allgemeine Integral der completen Gleichung:

$$y = y_1 \int z_1\,dx + y_2 \int z_2\,dx + a_1 y_1 + a_2 y_2$$

wo

$$z_1 = -\frac{Q}{P_2} \frac{y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

$$z_2 = \frac{Q}{P_2} \frac{y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

Dieses Verfahren lässt sich ausdehnen auf eine lineare Gleichung beliebiger Ord=

nung:

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = Q$$

sind $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ n von einander unabhängige Integrale der reduzierten Gleichung, so bietet das allgemeine Integral der completten Gleichung:

$$y = \left| \begin{array}{l} y_1 \int R_1 dx + y_2 \int R_2 dx + y_3 \int R_3 dx + \ldots + y_n \int R_n dx \\ + a_1 y_1 \quad + a_2 y_2 \quad + a_3 y_3 \quad + \ldots + a_n y_n \end{array} \right|$$

wo $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ die willkürlichen Constanten. $z_1, z_2, z_3 \ldots z_n$ werden berechnet aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &1) \; y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + \ldots + y_n z_n = 0 \\ &2) \; y_1' z_1 + y_2' z_2 + y_3' z_3 + \ldots + y_n' z_n = 0 \\ &3) \; y_1'' z_1 + y_2'' z_2 + y_3'' z_3 + \ldots + y_n'' z_n = 0 \\ &\quad \vdots \\ &n-1) \; y_1^{(n-2)} z_1 + y_2^{(n-2)} z_2 + y_3^{(n-2)} z_3 + \ldots + y_n^{(n-2)} z_n = 0 \\ &n) \; y_1^{(n-1)} z_1 + y_2^{(n-1)} z_2 + y_3^{(n-1)} z_3 + \ldots + y_n^{(n-1)} z_n = \frac{Q}{P_n} \end{aligned}$$

Satz: Die Determinante dieses Systems ist nie gleich Null.

Haben wir die Diffgleichung:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q,$$

so modifizirt sich das Verfahren in folgende Formel für die Bestimmung des

allgemeinen Integrale der completen Gleichung:

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{f'(r_1)} \int Q e^{-r_1 x} dx + \frac{e^{r_2 x}}{f'(r_2)} \int Q e^{-r_2 x} dx + \ldots\ldots + \frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)} \int Q e^{-r_n x} dx$$

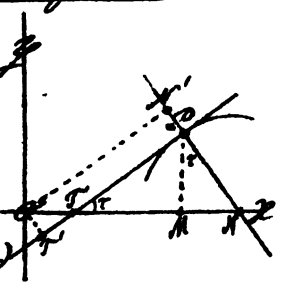
wo $r_1, r_2 \ldots r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der reduzierten Differentialgleichung. — Die willkürlichen Constanten sind bei jedem Integral noch zu setzen.

Bei der Gleichung:
$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = Q$
lautet die Formel für das allgemeine Integral:

$$y = \frac{x^{r_1}}{f'(r_1)} \int Q x^{-r_1 - 1} dx + \frac{x^{r_2}}{f'(r_2)} \int Q x^{-r_2 - 1} dx + \ldots\ldots + \frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)} \int Q e^{-r_n - 1} dx$$

wo wieder $r_1, r_2, \ldots r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der reduzierten Diff.-gleichung, und wo die willkürlichen Constanten noch hinzugesetzt werden müssen.

Geometrische Anwendungen der Differenzialgleichungen.



$OM = x$ (Abscisse)
$PM = y$ (Ordinate)
$PT = y\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}$ (Tangente)
$PN = y\sqrt{1+p^2}$ (Normale)
$MT = \frac{y}{p}$ (Subtangente)
$MN = py$ (Subnormale)
$OT' = \frac{px-y}{\sqrt{1+p^2}}$ (Abstand d. Nullp. von d. Tang.)
$ON' = \frac{py+x}{\sqrt{1+p^2}}$ (Abstand d. " " " Norm.)

1) Alle Kurven zu finden, deren Subnormale constant ist:

Diff.-gleichung: $yp = a$.
Int.- " $y^2 = 2a(x-x_0)$,
welches die Gleichung aller Parabeln ist, deren Hauptaxe die x-Axe ist.

2) Alle Kurven zu finden, bei denen der Abstand der Tangente vom Anfangspunkt constant ist.

Diff.-gleichung: $\frac{px-y}{\sqrt{1+p^2}} = a$
Int.- " $y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2}$,
welches die Gleichung aller Geraden ist im Abstande a vom Nullpunkt.
Singuläres Integral:

$$0 = x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

der nach Elimination von p und y mit Hülfe der gegebenen Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

welches die Gleichung eines Kreises ist, derselbe ist also die Enveloppe jenes Systems von Geraden, welches seine Tangenten sind.

3) alle Kurven zu finden, bei denen der Abstand des Anfangspunktes von der Tangente irgend eine Funktion $f(x) = \varphi(x^2+y^2)$ des Radius-vektors ist:

Diff.-gleichung:

$$f(x) = \frac{y - px}{\sqrt{1+p^2}}$$

Int.-gleichung:

$$v = \int \frac{f(x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - (f(x))^2}} + \alpha$$

4) alle Kurven zu finden, bei denen die Fläche dem Bogen proportional ist:

Diff.-gleichung:

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = a \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+p^2}\,dx$$

$$y = a\sqrt{1+p^2}$$

Int.-gleichung

$$y = \frac{a}{2}\left\{ e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right\}$$

welches die Gleichung der Kettenlinie ist. Die y-Axe ist parallel der Symmetrieaxe der Kettenlinie, die x-Axe ist senkrecht zu dieser in Abstande a von dem tiefsten

Punkte derselben.
Singuläres Integral:

$$y = a$$

also eine zur x-Axe parallele Gerade im Abstande a, d.h. die gemeinschaftliche Scheiteltangente aller Kettenlinien des Systems.

5) Alle Kurven zu finden, deren Krümmungsradien gleich der Länge der Normalen sind.
Diff.-gleichung:

$$y\sqrt{1+p^2} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \qquad \text{oder}$$

$$1) \quad y = \frac{1+p^2}{q}$$

$$2) \quad -y = \frac{1+p^2}{q}$$

Integralgleichungen:

$$1) \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right),$$

Gleichung der Kettenlinie, a und x_0 sind die willkürlichen Constanten.

$$2) \quad (x-x_0)^2 + y^2 = a^2$$

Gleichung aller Kreise von beliebigem Radius a, deren Centren alle auf der x-axe liegen.

6) Gleichung aller Kurven deren Krümmungsradien der dritten Potenz der Normalen proportional sind:

Diff.-gleichung:

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{1}{f}(f\sqrt{1+p^2})^3 \qquad \text{oder}$$

$$q = \frac{1}{f^3}$$

Int.-gleichung:

$$\alpha^2 x^2 = \alpha y^2 - f$$

Gleichung eines Kegelschnittes:

$\alpha < 0$: Ellipse;

$\alpha > 0$: Hyperbel.

7) Kurven, deren Krümmungsradius const. ist:

Diff.-gleichung:

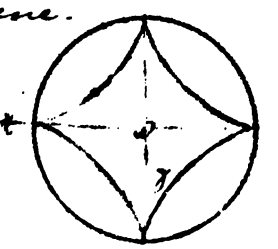
$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{dx} = \frac{1}{c}$$

Int.-gleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$

Gleichung aller Kreise der Ebene.

8) Die Enveloppe einer Geraden von gegebener Länge l, deren Enden sich auf den beiden Schenkeln eines rechten Winkels bewegen, ist eine Hypocycloide, bei welcher der Radius des l-Kreises zu dem des Differentials sich verhält wie $1 : 4$. Ihre Gleichung lautet



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

Isogonale Trajektorie

Ist ein Kurvensystem gegeben durch die Gleichung

1) $$f(x, y, \alpha) = 0$$

so existirt ein zweites Kurvensystem der Art, dass jede Kurve des gegebenen von allen Kurven dieses Systems unter demselben Winkel $\varkappa$, dessen Tangente gleich k ist (also $\operatorname{tg} \varkappa = k$), geschnitten wird. Die Diff.-gleichung dieses zweiten Systems lautet:

2) $$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} = k \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ etc berechnet man mit Hülfe der gegebenen Gleichung 1). Die Diff.-gleichung wird also noch die willkürliche Constante α des ersten Systems enthalten, welche Constante mit Hülfe der gegebenen Gleichung 1 eliminirt wird. Wir erhalten dann als Diff.-gleichung des gesuchten Systems eine Gleichung

$$F(x, y, p) = 0 \quad ,$$

welche integrirt werden kann:

$$G(x, y, \beta) = 0 \quad ,$$

die Int.-gleichung des gesuchten Systems, in der β die willkürliche Constante.

Soll der Winkel ein Rechter sein, also

$$\kappa = \frac{\pi}{2} \quad \text{folgl.} \quad \operatorname{tg}\kappa = K = \infty ,$$

so lautet die Diff.-gleichung des Systems der Trajektorien:

$$2') \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - p \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

voraus wieder, bevor man sie integrirt, die vorkommende willkürliche Constante α des ersten Systems mit Hülfe von Gleichung 1) eliminirt werden muss.

Beispiele:

1) Sei gegeben

$$y = \alpha x^2 ,$$

wo α die willk. Constante, so lautet die schliefsliche Diffgleichung der Trajektorien:

$$(ny + Kx)\,dx = (x - nKy)\,dy .$$

Sei nun $n = 1$

so lautet die Jnt.-gleichung in Polarcoordinaten

$$r = \beta . e^{\frac{\varphi}{K}} ,$$

die Gleichung aller logarithmischen Spiralen um den Anfangspunkt, welche die Radien-vektoren unter demselben Winkel κ durchschneiden. Jst $\kappa = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$r = \beta$$

die Gleichung aller Kreise um den Anfangspunkt.

2) Die Gleichung eines Kreises auf der x-Axe lautet:

$$(x-\lambda)^2 + y^2 = a^2$$

Die orthogonale Trajektorie ($\kappa = \frac{\pi}{2}$) dieses Kreissystems hat die Gleichung:

$$x - \alpha = \sqrt{a^2 - y^2} - a \cdot \lg\left\{\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right\},$$

wo α die willkürliche Constante ist.

Diese Kurve hat die Eigenschaft, dass ihre Tangenten alle dieselbe Länge haben und heißt <u>Tractoria</u>.

3) Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1 \qquad (\text{wo } a > b)$$

stellt ein System confokaler Kegelschnitte dar, denn:

es ist $\qquad c^2 = (a+\lambda) - (b+\lambda) = a - b$

constant.

Für jedes λ erhalten wir einen andern Kegelschnitt:

Für <u>$\lambda = +\infty$ bis $-b$</u> haben wir eine Ellipse.

" <u>$\lambda = -b$</u> haben wir das doppelt gelegte Stück der x-Axe zwischen den Brennpunkten (: Ellipse von ∞ kleiner y-Axe:)

oder: das doppelt gelegte Stück derselben außerhalb der Brennpunkte (: Hyperbel mit unendlich kleiner y-Axe:)

" $\lambda = -b$ bis $-a$ haben wir eine Hyperbel.

Für von $\lambda = -a$ bis $= -\infty$ haben wir keinen reellen Kegelschnitt mehr.

Bestimmen wir das System der orthogonalen Trajektorien dieses Systems confokaler Kegelschnitte, so erhalten wir das nämliche System wieder. Die Ellipsen und Hyperbeln stehen in jedem Punkt senkrecht aufeinander.

Die Gleichung des Systems läßt sich auch schreiben:

$$\varphi(\lambda) = (a+\lambda)(b+\lambda) - x^2(b+\lambda) - y^2(a+\lambda) = 0,$$

eine in λ quadratische Gleichung. Betrachten wir x und y als Constante, so erhalten wir durch Auflösen zwei Werte p und q für λ, d.h. durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kegelschnitte des Systems, welche sich rechtwinklig durchschneiden, und zwar eine Ellipse und eine Hyperbel. Ist p eine negative, zwischen $-a$ und $-b$ liegende Größe, so bedeutet

$$\frac{x^2}{a+p} + \frac{y^2}{b+p} = 1$$

eine Hyperbel des Systems der confokalen Kegelschnitte; bedeutet q eine Größe zwischen $+\infty$ und $-b$, so stellt

$$\frac{x^2}{a+q} + \frac{y^2}{b+q} = 1$$

eine Ellipse jenes Systems dar, und für irgend ein Wertepaar p und q erhalten wir vier Paare zugehöriger x und

y; d.h. je eine Ellipse und eine Hyperbel des Systems durchschneiden sich in vier (zu den Axen symmetrisch gelegenen) Punkten, deren Coordinaten wir berechnen aus:

$$x^2 = \frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)}$$

$$y^2 = \frac{(b+p)(b+q)}{(b-a)}$$

(Zeichencombination!)

Bestimmung der Evolventengleichung aus der Gleichung der Evolute.

Lautet die Gleichung der Evolute

$$\eta = \varphi(\xi) \quad , \quad (1$$

so setzen wir diesen Werth ein in die Gleichung

$$(\xi - x) + p(\eta - y) = 0 \quad (2$$

und eliminiren daraus ξ mit Hülfe von

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p} \quad , \quad (3$$

welches durch Differenziation des Ausdruckes rechts in der Gleichung (1 nach ξ erhalten wird, und bekommen die Diff.gleichung der Evolventen, aus welcher durch Integration die Integralgleichung derselben erhalten wird — denn zu einer Evolute gehören unzählig viele Evolventen, welches Parallelkurven sind.

Beispiele: 1) Die Evolvente der Kettenlinie hat die Gleichung:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \operatorname{Ar}\cosh \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

und ist also die Traktorie.

2) Die Evolvente der Kurve, welche die Gl.:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

hat, besitzt die Gleichung:

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$$

und ist also eine gleichseitige Hyperbel.

Anhang:

Systeme linearer Differenzialgleichungen, aus welchen mehrere unbekannte Funktionen bestimmt werden sollen.

1) Methode der Elimination:

Ist z.B. gegeben:

1) $4\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 8x - 7y = 0$

2) $11\frac{dx}{dt} - 4\frac{dy}{dt} - 23x + 10y = 0$

so differenziere wir diese beiden Gleichungen noch einmal nach t und erhalten so zwei neue Gleichungen:

3) $4\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} - 7\frac{dy}{dt} = 0$

4) $11\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{d^2y}{dt^2} - 23\frac{dx}{dt} + 10\frac{dy}{dt} = 0$

Wir eliminieren aus dreien (den drei letzten z.B.) dieser Gleichungen die drei Größen y, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$, welche als Unv.

bekannte betrachtet werden und setzen ihre Werthe in der ersten ein, wir erhalten dadurch eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 3x = 0 \quad ,$$

aus welcher wir x als Funkt. von t bestimmen können:

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} \qquad \text{also}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}$$

Jetzt eliminiren wir aus den ersten beiden Gleichungen $\frac{dy}{dt}$ und setzen in der erhaltenen neuen Gleichung für x und $\frac{dx}{dt}$ die oben gefundenen Werthe und können dadurch durch Auflösen sofort auch y als Funktion von t bestimmend:

$$y = 5c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{t}$$

---

2) Methode der Combination:

Ist uns z.B. gegeben das System der Gleichungen:

1) $\quad 4\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 15x - 2y = 0 \quad \Big| \alpha$

2) $\quad 2\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} - 9x + 10y = 0 \quad \Big| \beta \;,$

so multiplizieren wir sie mit zwei noch unbestimmten Faktoren α und β und addiren sie:

3) $\frac{d\{(4\alpha+2\beta)x + (\alpha-3\beta)y\}}{dt} + (-15\alpha-9\beta)x + (-2\alpha+10\beta)y = 0$

Die Faktoren α und β werden nun so bestimmt dass:

4) $(-15\alpha-9\beta)x + (-2\alpha+10\beta)y = \lambda\{(4\alpha+2\beta)x + (\alpha-3\beta)y\} = \lambda u$

so dass wir also schreiben können:

$$\frac{du}{dt} + \lambda u = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{du}{u} = -\lambda\, dt \qquad \text{also}$$

$t = -\frac{1}{\lambda}\{lg(u) - lg(c)\}$ oder $\lambda t = lg\left(\frac{c}{u}\right)$ folgt.

5) $\underline{\underline{u = c\,e^{-\lambda t}}}$

Aus Gl. 4 folgt:

$$\begin{cases} -15\alpha - 9\beta = \lambda(4\alpha - 2\beta) \\ -2\alpha + 10\beta = \lambda(\alpha - 3\beta) \end{cases} \qquad \text{oder}$$

6) $$\begin{cases} \alpha(-15 - 4\lambda) + \beta(-9 + 2\lambda) = 0 \\ \alpha(-2 - \lambda) + \beta(10 + 3\lambda) = 0 \end{cases}$$

was nur möglich, wenn

7) $$\begin{vmatrix} (-15 - 4\lambda) & (-9 + 2\lambda) \\ (-2 - \lambda) & (10 + 3\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

woraus sich zwei Werthe λ_1 und λ_2 ergeben, und folglich lt. Gl. 6) auch zwei Verhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$, welche in Gl. 5) eingesetzt Veranlassung zu folgenden zwei Gleichungen geben:

8) $$\begin{cases} u_1 = c_1 e^{-\lambda_1 t} \\ u_2 = c_2 e^{-\lambda_2 t} \end{cases}$$

wo allgemein

$$u = (4\alpha + 2\beta)x + (\alpha - 3\beta)y.$$

Wir haben also zwei Gleichungen in x und y und einer Funktion von t, können also die ersten beiden Variablen durch Ausrechnung eingehen als Funktionen von t darstellen. c_1 und c_2 bedeuten wie in der vorigen Meth. die will Kürl. Constanten.

3) Methode:

Es seien wieder beispielsweise gegeben:

$$1) \quad \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 3x - 2z = 0$$

$$2) \quad 3\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} + y - 5z = 0$$

$$3) \quad 9\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} + 16x = 0$$

Wir kennen die Form der drei partikulären Integrale:

$$4) \quad \begin{cases} x = ae^{rt} \\ y = be^{rt} \\ z = ce^{rt} \end{cases}$$

Wir suchen die vier Größen a, b, c und r zu bestimmen, indem wir die Ausdrücke 4) in die gegebenen Gleichungen einsetzen, diese nach a, b, c ordnen und dann erhalten wir:

$$5) \quad \begin{cases} a(r+3) + 2br - 2c = 0 \\ 3ar + b - c(r+5) = 0 \\ 16a + 9br - cr = 0 \end{cases},$$

welche Gleichungen nur bestehen können, wenn:

$$6) \quad \begin{vmatrix} r+3 & 2r & -2 \\ 3r & 1 & -(r+5) \\ 16 & 9r & -r \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus ergeben sich drei Werthe r_1, r_2, r_3 von r und ihnen entsprechend auch drei Verhältnisse $a : b : c$ lt. Gl. 5), folgl. lt. Gl. 4) erhalten wir drei Systeme der Variablen x, y, z als Funkt. von t:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 = a_1 e^{r_1 t} ; & y_1 = b_1 e^{r_1 t} ; & z_1 = c_1 e^{r_1 t} ; \\ x_2 = a_2 e^{r_2 t} ; & y_2 = b_2 e^{r_2 t} ; & z_2 = c_2 e^{r_2 t} ; \\ x_3 = a_3 e^{r_3 t} ; & y_3 = b_3 e^{r_3 t} ; & z_3 = c_3 e^{r_3 t} ; \end{array}\right\} (7$$

und daraus ergeben sich die allgemeinen Integrale der gegebenen Diff.-gleichgen.:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\ y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 \\ z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \end{array}\right\} (8$$

wo α, β, γ die willkürlichen Constanten.

VII. Theil.

Variationsrechnung.

Gegeben ist die Funktion

$$F(x, y, y')$$

Es soll $y = \varphi(x)$ so bestimmt werden, dass, wenn man es und seine Ableitung

$$y' = \varphi'(x)$$

in $F(x, y, y')$ einsetzt, der Werth des Integrals

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

ein Minimum, resp. Maximum, wird; x_1 und x_0 sind gegebene constante Grössen.

Die gesuchte Funktion y muss

folgender Differenzialgleichung genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} = 0$$

Berechnet man aus dieser Differenzialgleichung II^{ter} Ordnung die Funktion y, so erhält man eine Funktion mit zwei willkürlichen Parametern und es ist daher stets möglich, mit dieser Funktion noch zwei Nebenbedingungen (: Grenzbedingungen :) zu genügen.

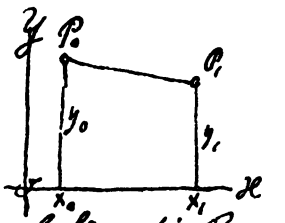
Kommt in der Funktion F die Veränderliche x nicht explicite vor, so lässt sich obige Differenzialgleichung II^{ter} Ordnung auf eine solche von der ersten Ordnung zurück führen, aus welcher die Funktion y bestimmt werden kann. Diese reduzirte Diff=gl. lautet:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = K$$

wo K bereits eine aus der Reduktion erfolgende willkürliche Constante. Durch Auflösen dieser Gleichung wird zu K eine zweite hinzutreten, welche beide durch die Gleichungen

der Grenzbedingungen eliminiert werden.

Beispiele: 1) Die Aufgabe, die Kurve zu finden, welche die beiden P_1 und P_0 zum Kürzesten mit einander verbindet, führt nach der Formel für die Rektifikation der Kurven darauf zurück, diejenige Funktion y zu finden, für welche



$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

ein Minimum ist. Diese Kurve, resp diese Funkt. ist die Gerade:

$$y = ax + b\,,$$

wo die willkürlichen Constanten a und b bestimmt werden durch die Grenzbedingungen

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_0 = ax_0 + b$$

---

2) Die Verbindungskurve $y = \varphi(x)$ von P_1 und P_0 soll so bestimmt werden, dass der Inhalt der durch ihre Rotation um die x-Axe entstehende Oberfläche ein Minimum wird.

Dann muss also

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

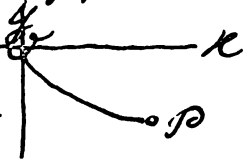
ein Minimum sein; dies ist der Fall

für $y = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right\} = \varphi(x)$ d. h. für die Kettenlinie. Bestimmung von a & b aus

$$y_1 = \varphi(x_1)$$
$$y_2 = \varphi(x_0)$$

---

3) Die Brachistochrone oder die Kurve der kürzesten Fallzeit zu finden, d. h. diejenige Kurve, auf der sich ein Schwerer Punkt bewegen muss, um unter dem Einfluss der Schwerkraft allein von einem Punkte O (Anfangspunkt) zu einem tiefer gelegenen Punkte P zu gelangen.



In jedem Zeitmomente ist die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gy}$$, und das Weg-element ist

$$ds = \sqrt{2gy}\, dt$$, also das Zeitelement $dt = \frac{ds}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2g}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$,

folgl. die ganze Fallzeit:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$. Es muss also

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

ein Minimum sein, was der Fall ist für

$$x - x_0 = l(u - \sin u)$$
$$y = l(1 - \cos u)$$

wo x_0 und l die mit den Bedingungen zusammenhängenden Constanten sind, während u eine neue Variable (der Wälzungswinkel) ist — die gesuchte Kurve ist ein Cycloidenbogen.

Es sei eine Funktion von fünf Variablen $F(t, x, y, x', y')$, wo x und y Funktionen von t sind & x' und y' die Ableitungen derselben nach t bedeuten, gegeben. Es soll untersucht werden, für welche Funktionen x und y und für welche Grenzwerthe das bestimmte Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, x', y')\, dt$$

ein Minimum resp. Maximum wird.

Die gesuchten Größen x, y, t_1 und t_0 sind nebst aus den Grenzbedingungen aus folgenden Gleichungen bestimmbar:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial x'}}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y = 0$$

für $t = t_0$ und $t = t_1$,
wo δx und δy solche Änderungen der Variablen, die mit den Grenzbedingungen verträglich sind, bedeuten.

Sei uns speziell die Funktion

$$F(x, y, p)$$

gegeben, und soll y als Funktion von x gemacht werden, so dass

$$\int_{x_0}^{x} F(x, y, p)\, dx$$

ein Minimum resp. Maximum, so finden wir die gesuchten Größen nebst aus den Grenzbedingungen aus folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d \frac{\partial F}{\partial p}}{dx} = 0$$

$$F \delta x + \frac{\partial F}{\partial p} (\delta y - p \delta x) = 0 \quad ,$$

wo wieder δx und δy solche Änderungen von x und y bezeichnen, die mit den Grenzbedingungen verträglich sind.

Durch Anwendung dieser Formeln findet man, dass die Kurve, die einen gegebenen Punkt$_1$ mit einem gegebenen Punkte$_3$ einer Kurve$_2$ einer Kurve$_4$

auf die möglich kürzeste Art verbindet, die vom Punkte auf die Kurve gefällte Normale ist — und ebenso, dass die Kurve, welche zwei Punkte zweier gegebener Kurven miteinander auf die möglich kürzeste Weise verbindet, die beiden Kurven gemeinschaftliche Normale ist.

Es ist gegeben die Funktion:

$$F(x, y, y', y'')$$

es soll y als Funktion von x bestimmt werden, so dass:

$$\int_{x_0}^{x} F(x, y, y', y'')\, dx$$

ein Maximum resp. Minimum wird. Diese Funktion bestimmt sich aus der folgenden Differenzialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial F}{\partial y''}}{dx^2} = 0 \quad ;$$

sie wird vier willkürliche Parameter enthalten und folgl. vier Bedingungen genügen.

Durch Anwendung davon gelangt man zu der Einsicht, dass die Cycloide die Kurve ist, welche mit

ihrer Evolute den Kleinsten Flächeninhalt einschließt.

Relative Maxima & Minima.

Ist gegeben $F(x,y,y')$, sowie die Grenzen x_0 und x_1, und soll:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

zu einem Maximum resp. Minimum gemacht werden, während gleichzeitig

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')\,dx$$

eine vorgeschriebene Größe haben soll, so erhält man die gesuchte Funktion y, indem man diejenige Funktion bestimmt, welche

$$\int_{x_0}^{x_1} (F - \lambda G)\,dx \quad ,$$

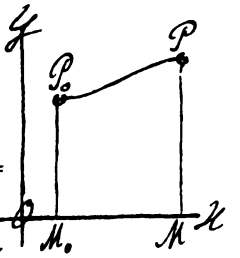
wo λ eine constante Größe, zu einem Maximum resp. Minimum macht; d.h. y hat der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial y'}}{dx} = 0$$

zu genügen. Die dadurch bestimmte Funktion enthält zwei Parameter, welche durch die Grenzbedingungen bestimmt werden. Der dritte Parameter λ wird durch

$$\int_{x_0}^{x} G(x, y, y')\,dx = c$$

bestimmt, indem man für y und y' die gefundenen Funktionen einsetzt, das Integral ausrechnet und daraus λ findet.



Aufgabe: 1) Man soll die Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und $P_1(x_1, y_1)$ durch eine Kurve von vorgeschriebener Länge so verbinden, dass der Inhalt der Fläche, begrenzt von Kurve, x-Axe & den Ordinaten der beiden gegebenen Punkte, ein Maximum wird. Welches ist die Gleichung der Kurve?
Es muss $\int_{x_0}^{x} y\,dx$ ein Maximum sein, während gleichzeitig:

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y_1^2}\,dx = c$$

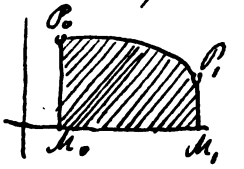
Durch Anwendung obiger Formel er-

halten wir als Gleichung der Kurve

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda^2$$

d.h. die Gleichung eines Kreises.
α, β, λ müssen auf angegebene Weise noch bestimmt werden.

2) Es soll die Verbindungskurve zweier Punkte $P_0(x_0 y_0)$ und $P_1(x_1 y_1)$ so bestimmt werden, dass sie eine gegebene Länge hat und der Inhalt des Körpers, welcher durch Rotation der Fläche $M_0 P_0 P_1 M_1$ um die x-Axe entsteht, ein Maximum wird. Diese Kurve hat die Gleichung



$$y=\frac{c}{\rho}$$

wo ρ der Krümmungsradius. Vertauschen wir die y-Axe mit der x-Axe, so erhalten wir die Gleichung:

$$x=\frac{c}{\rho},$$

d.h. die Gleichung der elastischen Linie: Der Krümmungsradius ist der Abscisse umgekehrt proportional.

3) Der Rotationskörper, welcher bei gegebener Oberfläche das größte Volumen hat, ist die Kugel.

VIII. Theil.

Methode d. kleinsten Quadrate.

Eintheilung der Beobachtungsfehler:

1) constante (oder bekannte), beispielsweise von Fehlern der Apparate herrührend, sie werden durch Controlirung der Instrumente & Correktion der Beobachtungen vermieden.
2) zufällige (oder unbekannte), welche ebenso gut positiv wie negativ sein können; sie werden durch Häufung der Beobachtungen gemildert und durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Hat man für eine Größe durch eine Anzahl Beobachtungen folgende nur wenig von einander verschiedene Werthe gefunden:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_n$$

so sollen wir eine Zahl x_0 bestimmen, dass ihre Abweichungen von den beobachteten Zahlen möglichst klein ist, was erfüllt ist, wenn (um verschiedene Vorzeichen zu vermeiden)

die Summe der Quadrate der Abweichungen, nämlich

$$(x_0 - x_1)^2 + (x_0 - x_2)^2 + \cdots + (x_0 - x_n)^2$$

ein Minimum ist. Die Zahl, welche diese Eigenschaft hat, ist das arithmetische Mittel aus den beobachteten Werthen; nämlich es ist:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} .$$

Für blos zwei Zahlen hat das arith. metische Mittel außerdem noch die Eigenschaft, dass es von beiden Zahlen um gleich viel abweicht, d.h., ist

$$x = \frac{a+b}{2} , \quad \text{wo } a > b ,$$

so ist $a - x = x - b = \frac{a-b}{2}$.

Haben wir eine Anzahl Beobachtungen gemacht a, b, c . . mit verschiedenen Zuverlässigkeiten oder Qualitäten, d.h. mit den Gewichten

$$p , q , r \cdots ,$$

so haben wir als den, von den verschiedenen Beobachtungen a, b, c . . . am wenigsten abweichenden, also die Summe der Quadrate der Abweichungen zu einem Minimum machenden, den Werth:

$$x = \frac{pa + qb + cr + \cdots}{p + q + r + \cdots}$$

mit dem Gewichte:

$$p+q+r+\cdots$$

Satz: Hat eine beobachtete Größe a das Gewicht p, so hat die mit dem Faktor k multiplizirte Größe, nämlich ak, das Gewicht:

$$\frac{p}{k^2}$$

Satz: Haben mehrere Größen a, b, c... die resp. Gewichte p, q, r, ..., so haben wir für das Gewicht p^* der Summe $(a+b+c+\cdots)$ die Gleichung:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \cdots$$

Soll eine Größe x_0 gefunden werden deren a-faches eine gewisse Anzahl mal hinter einander gleich gut beobachtet wurde:

$l = ax$	a
$l' = a'x$	a'
$l'' = a''x$	a''
$\cdots$	$\cdots$

so finden wir x_0 nach der Formel:

$$x_0 = \frac{al + a'l' + a''l'' + \cdots}{aa + a'a' + a''a'' + \cdots} = \frac{(al)}{(aa)}$$

d. h. man multiplizirt die Gleichungen der Reihe nach mit den

neben stehenden Werthen a a' a'' ... ged. dirt sie und findet x_0 aus aus der neuen Gleichung direkt. Setzen wir diesen Werth x_0 mit dem Gewichte

$$(aa) = a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots$$

in die obigen Gleichungen ein, so gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} l &= a x + \lambda \\ l' &= a' x + \lambda' \\ l'' &= a'' x + \lambda'' \\ &\cdots \end{aligned}\right\}$$

und es ist dann

$$(\lambda\lambda) = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots$$

die Summe der Quadrate der Abweichungen und liefert ein Mass für die Güte der Verträglichkeit der Beobachtungen. Wir bestimmen diese Grösse aus der Formel:

$$(\lambda\lambda) = \frac{(aa)(ll) - (al)(al)}{(aa)}$$

Haben wir eine Anzahl von Beobachtungen gemacht, für welche die Gleichungen gelten

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= l \\ a'x + b'y &= l' \\ a''x + b''y &= l'' \\ &\cdots \end{aligned}\right\}$$

aus denen x_0 und y_0 so berechnet werden sollen, dass sie die angegebenen Gleich.

ungen möglichst alle gleich gut befriedigen, so finden wir sie nach den Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} x_0(aa) + y_0(ab) = (al) \\ x_0(ba) + y_0(bb) = (bl) \end{array}\right\} \quad 1$$

und die Gewichte der so gefundenen Grössen x_0 und y_0 sind resp.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(aa)(bb)-(ab)^2}{(bb)} \\ \dfrac{(aa)(bb)-(ab)^2}{(aa)} \end{array}\right. \quad 8$$

Setzen wir die gefundenen Werthe $x_0\ y_0$ in die gegebenen Gleichungen ein, so gehen sie über in

$$\begin{array}{rcl|l} ax_0 + by_0 & = & l - \lambda & \lambda \\ a'x_0 + b'y_0 & = & l' - \lambda' & \lambda' \\ a''x_0 + b''y_0 & = & l'' - \lambda'' & \lambda'' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \end{array}$$

Mit resp. $\lambda\ \lambda'\ \lambda''$ multiplizirt & dann addirt, ergiebt:

$$(\lambda\lambda) = (l\lambda) = (ll) - (al)x_0 - (bl)y_0$$

Je kleiner $(\lambda\lambda)$, um so besser verträgen sich die gemachten Gleichungen; man pflegt daher $(\lambda\lambda)$ stets zur Controle zu berechnen.

Haben wir nun Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= l \\ a'x + b'y + c'z &= l' \end{aligned}$$

$$a''x + b''y + c''z = l''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so finden wir die Werthe $x_0\ y_0\ z_0$ aus folgenden Gleichungen:

$$(aa)\,x_0 + (ab)\,y_0 + (ac)\,z_0 = (al)$$
$$(ba)\,x_0 + (bb)\,y_0 + (bc)\,z_0 = (bl)$$
$$(ca)\,x_0 + (cb)\,y_0 + (cc)\,z_0 = (cl)$$

Bezeichnen wir die Determinante der Größen, die als Coefficienten dieser drei Gleichungen auftreten, nämlich

$$\begin{vmatrix} (aa) & (ab) & (ac) \\ (ba) & (bb) & (bc) \\ (ca) & (cb) & (cc) \end{vmatrix} \overset{\text{mit}}{=} 2K$$

und ferner die Unterdeterminanten von $(aa), (bb), (cc)$ mit resp. A, B, C, so sind die Gewichte von x_0, y_0, z_0 resp.

$$\frac{K}{A}\ ,\quad \frac{K}{B}\ ,\quad \frac{K}{C}$$

ferner ist:

$$(ll) = (ll) - (al)\,x_0 - (bl)\,y_0 - (cl)\,z_0\ .$$

Analog macht sich die Sache für mehrere Variable.

Haben wir nun beobachtete Gleichungen mit n Unbekannten, wo $m > n$, so ist klar, dass je mehr Gleichungen wir haben, d. h. je größer die Differenz $m - n$

ist, um so besser die Werthe von x_0, y_0, z_0 sein werden, um so grösser dann aber auch der Ausdruck $(\lambda\lambda)$ sein wird — man nennt daher folgenden Ausdruck

$$\sqrt{\frac{(\lambda\lambda)}{m-n}}$$

das eigentliche Mass der Fehler, den mittleren Beobachtungsfehler.

—

1

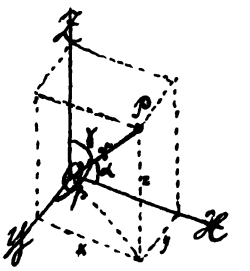
Anwendungen d. höhern Mathematik.

Raumkurven & Oberflächen.

IX. Theil.

Sätze und Formeln aus der analytischen Geometrie d. Raumes.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes P, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so ist der Abstand des Punktes vom Anfangspunkt O:



$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

& für die Winkel des Radiusvektors OP mit den Axen haben wir:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}\,; \quad \cos\beta = \frac{y}{r}\,; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

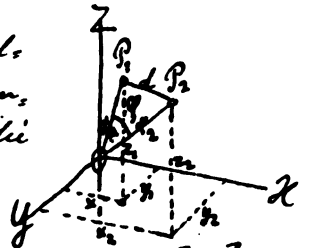
also dass:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 \end{array}\right\} \quad \text{K}$$

Für den Abstand zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ von einander haben wir die Gleichung:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

und für die Winkel der Verbindungsgeraden mit den Axenrichtungen, haben wir die Gleichungen:



$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{d}\,;\quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{d}\,;\quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_2}{d}$$

Hieraus folgt: Bildet irgend eine Gerade mit den Axen die Winkel α, β, γ, deren Cosinusverhältnisse bekannt sind durch die Gleichung:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c$$

so erhält man die Cosinusse selbst nach folgender Formel:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Den Winkel, den bei der Radienvektoren mit einander einschliessen, berechnen wir aus

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad \text{oder}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}\,,$$

den Flächeninhalt des Dreieckes OP_1P_2 berechnen wir aus:

$$4F^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

d. h. das Quadrat des Flächeninhaltes eines Dreieckes im Raume ist gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf irgend ein System dreier aufeinander senkrecht stehender Ebenen.

Dieser Satz gilt allgemein für irgend eine ebene Figur des Raumes.

Wird ein Polygon auf eine Ebene orthogonal projizirt, die mit seiner Ebene den Winkel α einschließt, so ist der Flächeninhalt der Projektion gleich dem Flächeninhalt der Originalfigur, multiplizirt mit dem cosinus des Neigungswinkels α.

Sind drei Punkte $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$ und $P_3(x_3 y_3 z_3)$ im Raume gegeben, so ist der Inhalt des von ihnen und dem Anfangspunkt gebildeten Tetraeders:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = J$$

Winkel zweier beliebiger Richtungen im Raume, die mit den Axen resp. die Winkel bilden $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

Für zwei aufeinander senkrechte Gerade muss also:

$$\cos\alpha_1 \cos\beta + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

Für zwei parallele Gerade hingegen muss:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 1$$

Wir finden für den Winkel zweier Gerader auch noch die Gleichung:

$$\sin\varphi = \sqrt{(\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)^2}$$

Sind zwei Richtungen mit den Winkeln resp. $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ gegen die Axen gegeben, so finden wir für die Winkel $\lambda\mu\nu$ gegen dieselben einer dritten, auf den beiden gegebenen senkrechten Richtung die Gleichungen:

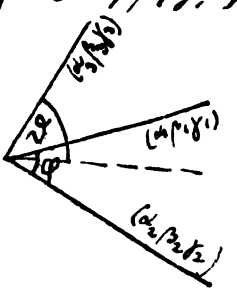
$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1}{\sin\varphi}$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1}{\sin\varphi}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1}{\sin\varphi},$$

wo $\sin\varphi$ durch die obige Gleichung gefunden wird.

Sind nun drei Richtungen $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$, deren Cosinusse wir bezeichnen wollen mit resp. $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, so haben wir die Gleichung:



$$\sin\varphi \sin\vartheta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$ wo

φ der Winkel der beiden ersteren Geraden und ϑ derjenige der dritten mit ihrer Ebene. Ist

$$\sin\varphi \sin\vartheta = \pm 1$$

so stehen die Geraden aufeinander senkrecht. Zwei Systeme senkrechter Geraden, deren Determinanten $\sin\varphi \sin\vartheta$ gleiche Vorzeichen haben heißen gleiche Systeme; zwei Systeme hingegen, deren Determinanten verschiedene Vorzeichen haben, heißen symmetrisch.

Transformation: Wollen wir irgend eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x, y, z, bezogen auf ein gegebenes Coordinatensystem, transformieren für ein neues Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt gegen den des alten Systems verschoben ist um $a\ b\ c$ und dessen Axen mit denen des ursprünglichen Winkel bilden, deren cosinus wir bezeichnen mit resp. $a_1\ b_1\ c_1$, $a_2\ b_2\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$, so haben wir darin zu setzen:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a + x'a_1 + y'a_2 + z'a_3 \\ y &= b + x'b_1 + y'b_2 + z'b_3 \\ z &= c + x'c_1 + y'c_2 + z'c_3 \end{aligned}\right\} \quad I,$$

wo $x'\ y'\ z'$ die Coordinaten, bezogen auf das neue System, bezeichnen. Wollen wir zurücktransformieren, d. h. einen Ausdruck in $x'y'z'$ auf das alte System

in x y z überführen, so haben wir zu setzen

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\,a_1 + (y-b)\,b_1 + (z-c)\,c_1 \\ y' &= (x-a)\,a_2 + (y-b)\,b_2 + (z-c)\,c_2 \\ z' &= (x-a)\,a_3 + (y-b)\,b_3 + (z-c)\,c_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

Das neue und das ursprüngliche System sind einander congruent und für solche Systeme gelten allgemein die Relationen:

In der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

ist jedes Element gleich seiner Unterdeterminante, was zu 9 Gleichungen Veranlassung gibt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_1 &= c_2 a_3 - c_3 a_2 \\ c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_2 &= c_3 a_1 - c_1 a_3 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ b_3 &= c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad \text{III}$$

Ferner gelten noch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{I}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \text{II}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{I}$$

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{I}$$

Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 - z}{z_1 - z_2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}$$

Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ unter den gegebenen Richtungen α, β, γ:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = r \quad ,$$ wo

r der Abstand des Punktes $x\ y\ z$ der Geraden vom gegebenen Punkte $P(x_1, y_1, z_1)$ bedeutet.

Gleichung einer Ebene durch drei gegebene Punkte $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$; $x_3 y_3 z_3$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Gleichung einer Ebene in allgemeiner Form:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Gleichung der Ebene mit den Axenabschnitten a, b, c:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

wo also

$$a = \frac{D}{A} \quad ; \quad b = \frac{D}{B} \quad ; \quad c = \frac{D}{C}$$

Gleichung der Ebene auf der Normalform:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0$$

wo α, β, γ die Winkel der vom Anfangspunkt auf die Ebene gefällten Normalen mit den Axen, und wo δ die Länge dieser Normalen ist. Es ist also dann:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{u.} \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{u.} \quad \delta = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \text{II}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{I}$$

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{I}$$

Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2} = \frac{z_1 - z}{z_1 - z_2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}$$

Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ unter den gegebenen Richtungen α, β, γ:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = r \quad ,$$ wo

r der Abstand des Punktes $x\ y\ z$ der Geraden vom gegebenen Punkte $P(x_1, y_1, z_1)$ bedeutet.

Gleichung einer Ebene durch drei gegebene Punkte $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$; $x_3 y_3 z_3$:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Gleichung einer Ebene in allgemeiner Form:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Gleichung der Ebene mit den Axenabschnitten a, b, c:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

wo also

$$a = \frac{D}{A} \quad ; \quad b = \frac{D}{B} \quad ; \quad c = \frac{D}{C}$$

Gleichung der Ebene auf der Normalform:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0$$

wo α, β, γ die Winkel der vom Anfangspunkt auf die Ebene gefällten Normalen mit den Axen, und wo δ die Länge dieser Normalen ist. Es ist alsdann:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{u.} \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{u.} \quad \delta = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene, deren Gleichung auf der Normalform ist (ist sie es nicht, so muss sie darauf gebracht werden:)

$$\delta = -\{x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - \delta\}$$

d. h. um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu erhalten, setzt man seine Coordinaten in die linke Seite der Normalgleichung der Ebene an Stelle der Variablen x y z und gibt dem ganzen Ausdruck das negative Vorzeichen.

Drei Ebenen gehen durch dieselbe Gerade, wenn man drei constante von Null verschiedene Faktoren $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ so bestimmen kann, dass das Polynom:

$$\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 \equiv 0$$

d. h. identisch verschwindet, wo

$$\varepsilon_1 = 0 \qquad \varepsilon_2 = 0 \qquad \varepsilon_3 = 0$$

die Gleichungen der drei Ebenen.

Vier Ebenen gehen durch denselben Punkt, wenn die Determinante der Coefficienten ihrer Gleichungen, verschwindet, d. h wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

Hierbei lautet die Gleichung einer Ebene:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$$

Winkel zweier Ebenen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

oder

$$\sin^2\varphi = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}$$

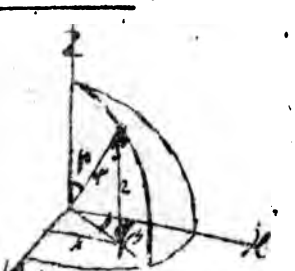
Sollen die Ebenen parallel sein, so muss

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

sollen sie aufeinander senkrecht stehen, so muss

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

Räumliche Polarcoordinaten:



Bedeutet r der Radiusvektor eines Punktes P, φ den Winkel desselben mit der positiven z-Axe und ψ den Winkel der durch Punkt und z-Axe gelegten Ebene mit der xz-Ebene des ersten Quadranten, so haben wir zwischen diesen Kugelcoordinaten und den gewöhnlichen Rechtwinkelcoordinaten folgende Beziehungen:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$z = r\cos p$$

$$x = r\sin p\cos q \quad , \quad y = r\sin p\sin q$$

$$\operatorname{tg} q = \frac{y}{x} \qquad q = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\operatorname{tg} p = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad p = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

Theorie der Raumkurven.

Eine Raumkurve wird als Schnitt zweier Oberflächen betrachtet. Sind die Gleichungen dieser letztern

$$F(x,y,z)=0 \quad \& \quad G(x,y,z)=0 \ ,$$

so stellen beide Gleichungen zusammen die Gleichung der Raumkurve dar.

Die Raumkurve kann aber auch gegeben sein durch:

$$x=\varphi(t) \ ; \quad y=\psi(t) \ ; \quad z=\chi(t) \ ,$$

wo also die Coordinaten als Funktionen einer dritten unabhängigen Variablen t gegeben sind.

Es ist die Länge eines unendlich kleinen Bogenelementes, oder das Bogendifferenzial:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

und die Richtungscosinus der Tangente in diesem Punkte $P(xyz)$ sind:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,;\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}\,;\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}\,,$$

so dass also:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = dx : dy : dz\,.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P(x\,y\,z)$ einer Raumkurve lautet also:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}\,,$$

und die der Normalebene in diesem Punkte lautet (d.h. nach der Kurve oder ihrer Tangente):

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0$$

ξ, η, ζ bedeuten in beiden Gleichungen die laufenden Coordinaten.

Die Ebene dreier aufeinanderfolgender unendlich naher Punkte oder zweier unendlich benachbarter Tangenten heißt Schmiegungsebene oder Osculationsebene der Kurve im Punkte P, und die in diesem Punkte errichtete Senkrechte (d.h. normal also zugleich auf den betreffenden zwei unendlich benachbarten Tangenten) heißt Binormale der Kurve im Punkte P. (Ihre Richtungscosinusse bezeichnen wir mit $\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$.)

Gleichung der Schmiegungsebene:

$$(\xi - x)\cos\alpha'' + (\eta - y)\cos\beta'' + (\zeta - z)\cos\gamma'' = 0$$

oder
$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

Gleichung der Binormalen:

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha''} = \frac{\eta - y}{\cos\beta''} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma''}$$ wo

$$\cos\alpha'' : \cos\beta'' : \cos\gamma'' =$$
$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y) : (dz\,d^2x - dx\,d^2z) : (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,.$$

Bezeichnet man mit $d\tau$ den unendlich kleinen Winkel zweier unendlich benachbarter gerader Linien von der Richtung α, β, γ gegen die Axen, so ist

$$d\tau = \sqrt{(d(\cos\alpha))^2 + (d(\cos\beta))^2 + (d(\cos\gamma))^2}\,.$$

Sind die beiden Geraden zwei unmittelbar aufeinander folgende Tangenten einer Raumkurve, so bezeichnet man ihren Winkel als Contingenzwinkel und hat nach obiger Formel für ihn gefunden:

$$d\tau = \sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

Verschieben wir alle Tangenten einer Raumkurve nach einem Punkte parallel zu sich selbst, so bilden sie hier den s.g. Richtungskegel. Der Winkel zweier unendlich benachbarter Erzeu-

gender des Mantels ist der Contingenzwinkel der ihnen entsprechenden unendlich nahen Tangenten der Kurve, und er ist gleich dem Bogendifferenzial der Durchdringungskurve des Kegels mit der Einheitskugel.

Die Schmiegungsebene in der liegende Normale der Kurve, also die Schnittlinie von Kurvennormalebene mit Schmiegungsebene, heißt: Hauptnormale; (Richtungscosinusse: $\cos\delta'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$); sie steht also senkrecht auf der rektifizirenden Ebene, welche gebildet wird von Tangente und Binormale.

Gleichung der rektifizirenden Ebene:

$$(\xi - x)\cos\alpha' + (\eta - y)\cos\beta' + (\zeta - z)\cos\gamma' = 0$$

Gleichung der Hauptnormalen:

$$\frac{\xi - x}{\cos\alpha'} = \frac{\eta - y}{\cos\beta'} = \frac{\zeta - z}{\cos\gamma'}$$

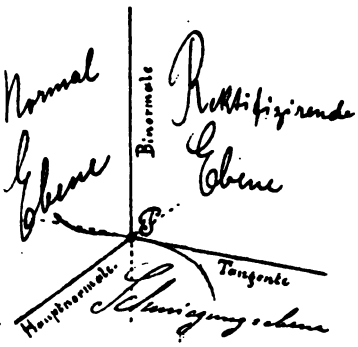
, wo

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = d\left(\frac{dx}{ds}\right) : d\left(\frac{dy}{ds}\right) : d\left(\frac{dz}{ds}\right)$$ oder

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = d(\cos\alpha) : d(\cos\beta) : d(\cos\gamma)$$

Der Schnitt zweier unendlich naher Schmiegungsebenen ist eine Tangente der Kurve; der Schnittpunkt dreier unendlich benachbarter Schmiegungsebenen ist der Berührungspunkt selbst oder der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Tangenten.

Der Schnitt zweier unend-
lich naher Normalebenen
heißt Krümmungsaxe
oder Polaraxe. Sie steht
senkrecht auf der Schmie-
gungsebene, ist also paral-
lel der Binormalen.



Durch drei aufeinanderfol-
gende Kurvenpunkte kann ein Kreis gelegt
werden, der ganz in der Schmiegungsebene
liegt und Krümmungskreis genannt wird.
Sein Mittelpunkt, das Krümmungscentrum,
ist identisch mit dem Durchschnittspunkt
der Polarlinie mit der Schmiegungsebene,
liegt also in der Hauptnormalen.

Die Gleichung der Normalebene lautet:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0$$

Ist nun $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \chi(t)$,
also $dx = \varphi'(t)\,dt$; $dy = \psi'(t)\,dt$; $dz = \chi'(t)\,dt$,
so können wir die Gleichung der Normalebene
symbolisch schreiben:

$$F(\xi, \eta, \zeta, t) = 0 \quad ,$$

wo also t ein Parameter, mit dessen Än-
derung sich auch die Normalebene ändert.
Es lautet also die Gleichung der dieser un-
endlich benachbarten Normalebene:

$$\frac{dF(\xi, \eta, \zeta, t)}{dt} = 0 \quad ,$$

und folglich lautet die Gleichung der
Polarlinie:

$$F(\xi,\eta,\zeta,t)=0 \quad \text{und} \quad \frac{dF(\xi,\eta,\zeta,t)}{dt}=0$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Punkt $P_{(x,y,z)}$ lauten:

$$\xi = x + \varrho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = x + \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2} \qquad (1$$

$$\eta = y + \varrho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} = y + \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2} \qquad (2$$

$$\zeta = z + \varrho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = z + \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2} \qquad (3\ ,$$

wo ϱ den Krümmungsradius bedeutet und berechnet wird aus:

$$\varrho = \frac{ds}{dN} = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}} \qquad \text{a.}$$

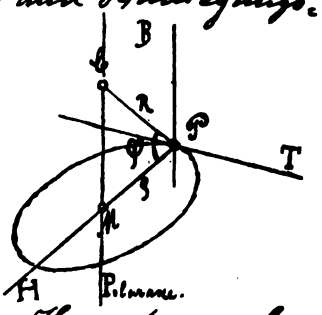
$$\varrho = \frac{(ds)^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}$$

$$\varrho = \frac{(ds)^3}{\sqrt{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}}$$

Das Centrum der sphärischen Krümmung einer Fläche ist der Mittelpunkt einer durch vier aufeinander folgende unendlich benachbarte Flächenpunkte gehende Kugel, oder der Schnitt dreier unendlich naher Normalebenen, oder zweier unendlich naher Polar-

axen. Der Krümmungskreis ist die Schnitt-
kurve von Krümmungskugel und Schmiegungs-
ebene. Ist R der sphärische
und ϱ der ebene Krümmungs-
radius, so ist

$$\varrho = R \cos \varphi \quad ,$$



wo φ der Winkel des sphärischen
Krümmungsradius mit der Hauptnormalen.
Aus den Gleichungen dreier aufeinander fol-
gender unendlich naher Normalebenen im
Punkte $P(x,y,z)$;

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta,t) = 0 \; ; \quad \frac{d\Phi(\xi,\eta,\zeta,t)}{dt} = 0 \; ; \quad \frac{d^2\Phi(\xi,\eta,\zeta,t)}{dt^2} = 0$$

finden wir die Coordinaten X, Y, Z des Mittel-
punktes der sphärischen Krümmung durch
Auflösen derselben nach ξ, η, ζ. Die erste
Gleichung stellt symbolisch für

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0 \quad ,$$ wo

$$x = \varphi(t) \; ; \quad y = \psi(t) \; ; \quad z = \chi(t) \quad , \text{ also}$$

$$dx = \varphi'(t)\,dt \; ; \quad dy = \psi'(t)\,dt \; ; \quad dz = \chi'(t)\,dt$$

(vergl. S. 240 und 245:)

Hat man X, Y, Z gefunden, so erhält
man aus der Gleichung der Krümmungs-
kugel:

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2$$

den Werth für den sphärischen Krümmungs-
radius R, wenn wir an Stelle von x, y, z
die Coordinaten des gegebenen Kurvenpunkt:

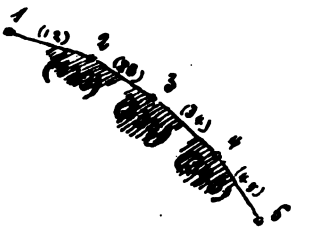
tes setzen, für welchen wir R bestimmen wollen. Wir finden übrigens noch auf andere Weise die XYZ; es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \varrho\cos\alpha' + \frac{d\varrho}{d\tau''}\cos\alpha'' \\ Y &= y + \varrho\cos\beta' + \frac{d\varrho}{d\tau''}\cos\beta'' \\ Z &= z + \varrho\cos\gamma' + \frac{d\varrho}{d\tau''}\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \text{Siehe unter d. Bedeutung von } \tau''$$

$$R = \frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

$\cos\varphi$ ist leicht bestimmbar aus den Größen x, y, z; X, Y, Z; ξ, η, ζ, welch' letztere Größen die Coordinaten des Mittelpunktes der ebenen Krümmung sind.

Drei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen (unendlich benachbarte;)



(123); (234); (345)

bestimmen einen Kreiskegel, dessen Spitze (3), der Schnittpunkt der drei Ebenen, auf der Kurve liegt. Die zwei Kanten (23) und (34) dieses Kreiskegels sind Kurventangenten und zugleich die Berührungslinien der Schmiegungsebenen (123) und (345) mit dem Kreiskegel. Die Axe des Kegels ist die Schnittlinie der durch diese Kanten gehenden und auf den resp. Schmiegungsebenen senkrechten Ebenen, d.h. die Schnittlinie der beiden zugehörigen unendlich benachbarten rektifizirenden Ebenen und

wird rektifizierende Kante genannt. Ihre Gleichung lautet:

$$\begin{cases} (\xi-x)\cos\alpha' + (\eta-y)\cos\beta' + (\zeta-z)\cos\gamma' = 0 \\ (\xi-x)\,d\cos\alpha' + (\eta-y)\,d\cos\beta' + (\zeta-z)\,d\cos\gamma' = 0 \end{cases}$$

Torsion oder Krümmung zweiter Ordnung.

Die Kurve krümmt sich nicht bloß planar in der Schmiegungsebene, sondern räumlich; d.h. die Schmiegungsebene ist in jedem Punkte eine andere, (: im Gegensatz zu den ebenen Kurven, wo die Schmiegungsebene, d.h. die Ebene der Kurve, in jedem Punkte dieselbe ist :), und der Winkel $d\tau''$ zweier solcher unendlich benachbarter Schmiegungsebenen, welcher gleich ist dem Winkel zweier benachbarter Binormalen, heißt Torsionswinkel. Er ist gleich dem Contingenzwinkel des entsprechenden Punktes der Durchdringungskurve von Richtungskegel und Einheitskugel.

Die Torsions-Krümmung ist

$$\frac{1}{S''} = \frac{d\tau''}{ds} \quad , \quad \text{wo}$$

$$\frac{d\tau''}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}$$

Ganze Krümmung. Darunter verstehen wir den Winkel zweier unendlich naher Hauptnormalen dividirt durch das Bogendifferenzial, also:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\tau'}{ds} = \frac{\sqrt{d\tau^2 + d\tau''^2}}{ds} \quad , \text{ also}$$

dass

$$\left(\frac{1}{\rho'}\right)^2 = \left(\frac{1}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\right)^2$$

Bezeichnen wir mit λ, μ, ν die Winkel der rektifizirenden Kante mit den Axen, so ist:

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha''\sin\vartheta$$
$$\cos\mu = \cos\beta\cos\vartheta + \cos\beta''\sin\vartheta$$
$$\cos\nu = \cos\gamma\cos\vartheta + \cos\gamma''\sin\vartheta \quad ,$$

ferner:

$$\frac{d\cos\lambda}{d\vartheta} = \frac{d\cos\alpha'}{d\tau'} \; ; \; \frac{d\cos\mu}{d\vartheta} = \frac{d\cos\beta'}{d\tau'} \; ; \; \text{etc.}$$

$$\frac{d\cos\nu}{d\vartheta} = \frac{d\cos\gamma'}{d\tau'} \; .$$

ϑ bedeutet den Winkel der rektifizirenden Kante mit der Tangente, und es ist:

$$\cos\vartheta = \frac{\rho'}{\rho''}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\rho'}{\rho} \; .$$

X. Theil.

Theorie der krummen Oberflächen.

Gleichung einer krummen Oberfläche:

1) $z = f(x,y)$

2) $F(x,y,z) = 0$

3) $x = \varphi(u,v)\ ;\ y = \psi(u,v)\ ;\ z = \chi(u,v)\ ,$

in welch letzterer Form die Coordinaten als Funktionen zweier weiterer unabhängiger Variablen dargestellt sind.

Beispiele hiefür:

1) Kugel: $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0\ ,$$

$z = r\cos\vartheta\ ;\ x = r\sin\vartheta\cos\varphi\ ;\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi.$

2) Ellipsoid: $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$z = c\cos\vartheta\ ;\ x = a\sin\vartheta\cos\varphi\ ;\ y = b\sin\vartheta\sin\varphi.$

3) Kegel: $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$z = ct\ ;\ x = at\cos u\ ;\ y = bt\sin u.$

Ist eine Oberfläche gegeben durch

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (1$$

und eine Kurve durch:

$x = \varphi(t)\ ;\ y = \psi(t)\ ;\ z = \chi(t)\ ,$ (2

so ist die Bedingung, dass dieselbe ganz auf der Oberfläche liegt:

$$F(\varphi(t), \psi(t); \chi(t)) \equiv 0 \qquad (3$$

d. h. die Funktion muss identisch verschwindend.

Liegt die Kurve nicht auf der Oberfläche, so ist die Funktion nicht identisch Null, und wir können aus der Gleichung (3 die Werthe von t ausrechnen, für welche sie verschwindet, und in 2) einsetzen und erhalten so die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Kurve mit der Oberfläche.

Die Gesammtheit aller Tangenten in dem Punkte $P_{(x,y,z)}$ einer krummen Oberfläche bildet eine Ebene, die Tangentialebene jenes Punktes, und ihre Gleichung lautet:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

wo ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten.

Bezeichnen wir im folgenden die Gleichung der Fläche mit

$$u = 0$$

, ferner:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2 \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{11} \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{22} \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = u_{23} \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = u_{31} \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{12}$$

so lautet die Gleichung der Tangential-ebene:

$$u_1(\xi - x) + u_2(\eta - y) + u_3(\zeta - z) = 0 .$$

Ist die Gleichung der Oberfläche in der Form gegeben,

$$z = f(x, y)$$

so lautet die Gleichung der Tangential-ebene:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) ,$$

wenn wir bezeichnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s .$$

Die Berührungsebene schneidet die Oberfläche gewöhnlich in einer Kurve, von der der Berührungspunkt ein Doppelpunkt ist. Sind die Tangenten in demselben imaginär, so reduziert sich dieselbe auf den Berührungspunkt. Der Punkt wird in diesem Falle ein elliptischer genannt und die Berührung ebenfalls eine elliptische. Sind die Tangenten des Doppelpunktes reell und verschieden, so haben wir den Fall der hyperbolischen Berührung. Fallen die Tangenten zusammen, so haben die para-

bolische Berührung, der Berührungspunkt ist ein Rückkehrpunkt der Schnittkurve der Tangentialebene mit der Oberfläche (: Bei den abwickelbaren Flächen sind alle Punkte parabolisch:)

Ist eine Flächengleichung auf der Form $u = 0$ oder $z = f(x,y)$,

so ist ein der Fläche angehöriger Punkt

ein hyperbolischer, wenn $rt - s^2 < 0$
ein elliptischer, wenn $rt - s^2 > 0$,
ein parabolischer, wenn $rt - s^2 = 0$

und es ist:

$$p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{u_1}{u_3} \quad ; \quad q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{u_2}{u_3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r = -\frac{u_{11}u_3^2 - 2u_{13}u_3u_1 + u_{33}u_1^2}{u_3^3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = t = -\frac{u_{22}u_3^2 - 2u_{23}u_3u_2 + u_{33}u_2^2}{u_3^3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s = -\frac{u_{12}u_3^2 - u_{13}u_2u_3 - u_{23}u_1u_3 + u_{33}u_1u_2}{u_3^3}$$

Lautet die Gleichung einer Fläche zweiten Grades:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

so ist ein ihr angehöriger Punkt

ein hyperbolischer, wenn $ABC < 0$
ein elliptischer, wenn $ABC > 0$

Alle Punkte einer Fläche zweiten Grades sind der nämlichen Art.

Gleichung der Normalen einer Fläche

$\underbrace{u=0}$

im Punkte $P_{(x,y,z)}$:

$$\frac{\xi-x}{u_1} = \frac{\eta-y}{u_2} = \frac{\zeta-z}{u_3}$$

Lautet die Gleichung der Oberfläche

$$z = f(x,y)$$

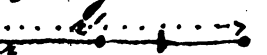
so lautet die Gleichung der Normalen

$$\frac{\xi-x}{-p} = \frac{\eta-y}{-q} = \zeta-z \qquad \text{oder}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \xi-x+p(\zeta-z)=0 \\ \eta-y+q(\zeta-z)=0 \end{array}\right\}$$

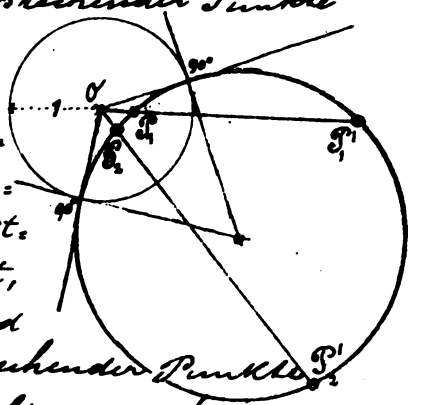
Reciproke Flächen.

Wir erhalten zu einer gegebenen krummen Oberfläche F die zugehörige <u>reciproke</u> für einen gegebenen Punkt O, wenn wir diesen Punkt mit jedem Punkte P der gegebenen Fläche verbinden und auf jedem so erhaltenen Strahle den reciproken Werth $r' = \frac{1}{r}$ des Radius vektors $\overline{OP} = r$ des Punktes P von O aus nach der nämlichen Seite hin abtragen. Die Gesamtheit aller so erhaltenen Punkte P' bildet eine krumme Oberfläche F', welche die



reciproke der Fläche F genannt wird, während umgekehrt diese die reciproke der Fläche F' ist.

Irgend zwei Paare entsprechender Punkte zweier reciproker Flächen P_1, P_1' und $P_2 P_2'$ liegen auf einem Kreise, der den von seiner Ebene aus der Einheitskugel herausgeschnittenen Kreis, oder diesen selbst, rechtwinklig schneidet; und irgend drei Paare entsprechender Punkte zweier solcher Flächen liegen auf einer Kugel, welche die Einheitskugel rechtwinklig durchschneidet.



Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten eines Punktes der Fläche von der Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0 \quad ,$$

so finden wir die Coordinaten des diesem Punkte entsprechenden Punktes P' der reciproken Fläche durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{r^2} \\ y' &= \frac{y}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y}{r^2} \\ z' &= \frac{z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{z}{r^2} \end{aligned}\right\} 1 \quad ,$$

wie umgekehrt aus den Coordinaten eines Punktes dieser Fläche wir die seines entsprechenden in der ersteren Fläche finden können durch:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'}{x'^2+y'^2+z'^2} = \frac{x'}{r'^2} \\ y &= \frac{y'}{x'^2+y'^2+z'^2} = \frac{y'}{r'^2} \\ z &= \frac{z'}{x'^2+y'^2+z'^2} = \frac{z'}{r'^2} \end{aligned}\right\} \quad 2$$

und wir erhalten die Gleichung der Fläche

$$F(x,y,z) = 0$$

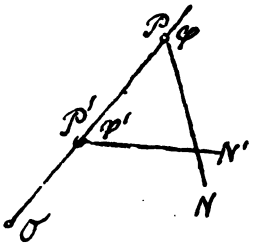
reciproken durch Einsetzen der Ausdrücke 2) an Stelle von x, y, z und umgekehrt.

Wir haben ferner die Gleichungen:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2} = \frac{1}{r'^2}\sqrt{\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F'}{\partial z}\right)^2}$$

Satz: Die Normalen zweier entsprechender Punkte liegen mit dem Radius vektor in derselben Ebene, und überdies ergänzen sich die Winkel, die sie mit ihm einschließen, auf 180°.



Fußpunktsflächen.

Fällen wir auf jede Tangentialebene einer gegebenen Fläche von einem gegebenen Punkte aus das Loth, so bildet die Gesammtheit der Fußpunkte dieser Lothe wieder eine Fläche, die Fußpunktsfläche der ersteren, während diese selbst die

negative Fußpunktsfläche der zweiten heißt.
Lautet die Gleichung der gegebenen Fläche $u = F(x,y,z) = 0$,
so finden wir die Gleichung der Fußpunktsfläche:

$$v = G(x,y,z) = 0 \quad ,$$

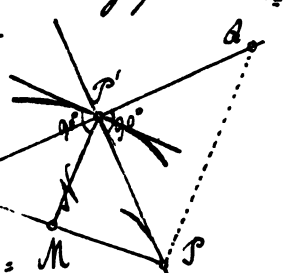
wenn wir aus folgenden drei Gleichungen

$$x = u_1 \overset{\circ}{u} \; ; \quad y = u_2 \overset{\circ}{u} \; ; \quad z = u_3 \overset{\circ}{u} \quad ,$$

wo

$$\overset{\circ}{u} = \frac{u_1 x + u_2 y + u_3 z}{u_1^2 + u_2^3 + u_3^2} \quad ,$$

und der gegebenen ursprünglich die Variablen x,y,z eliminieren.
Satz: Die Normale der Fußpunktsfläche halbirt den Radius vektor der Originalfläche.
Dies gibt ein sehr einfaches Mittel zur Construktion der negativen Fußpunktsfläche, wenn die Fußpunktsfläche bekannt ist: Wir verlängern OP' um sich selbst bis Q und ziehen Q durch Q eine Parallele zu $P'M$. Der Schnittpunkt der selben mit mit der auf dem Radius vektor OP' senkrechten Ebene durch P' ist der entsprechende Punkt der negativen Fußpunktsfläche.



Wollen wir aus der gegebenen Glei-

chung $v = 0$ einer Fläche die Gleichung der negativen Fußpunktsfläche, so eliminieren wir aus ihr und den folgenden Gleichungen die Variablen $x' y' z'$:

$$x = 2x' - v_1 v \; ; \quad y = 2y' - v_2 v \; ; \quad z = 2z' - v_3 v \; ,$$

wo

$$v = \frac{x' + y' + z'}{v_1 x' + v_2 y' + v_3 z'} \; .$$

Beispiel aus der Optik:

Die Gleichung des Hauptellipsoids lautet:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

Die Gleichung des Centralellipsoids lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Die Gleichung der reciproken Fläche (= Elastizitätsfläche) des andern Ellipsoids lautet:

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^2 \; ,$$

und dieselbe Gleichung erhält man, wenn die Gleichung der Fußpunktsfläche des zweiten Ellipsoids gebildet wird.

Krümmung der Oberflächen.

Krümmung ebener Schnitte von Oberflächen.

Für einem gegebenen Punkte $P(x\,y\,z)$ einer Oberfläche von der Gleichung

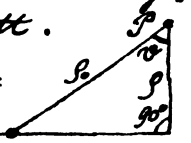
$$z = f(x, y)$$

können wir eine beliebige Tangente der Fläche ziehen und nun dieselbe eine Ebene drehen,

es wird dieselbe dann in jeder Lage eine Kurve aus der Fläche herausschneiden. Bedeutet ρ der Krümmungsradius für den Punkt P irgend des Schnittes einer Ebene, die durch eine der durch ihn gehenden Tangenten der Oberfläche gelegt ist, und bedeutet ϑ der Winkel, den diese Ebene mit der durch die nämliche Tangente gelegten Normalebene einschließt (: die Normalebene durch eine Tangente einer Oberfläche ist die Ebene, die durch die Normale des Berührungspunktes der Tangente geht :), so haben wir die Gleichung:

$$\rho = \rho_0 \cos \vartheta \quad ,$$

welche unter dem Namen: Satz von Meusnier bekannt ist. ρ_0 bedeutet den Krümmungsradius von P im Normalschnitt. Für die Berechnung desselben haben wir die Formel:



$$\rho_0 = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2} \quad ,$$

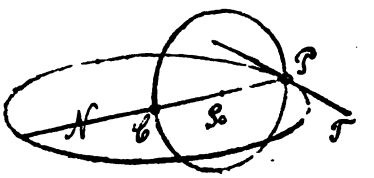
wo p, q, r, s, t die bekannte Bedeutung haben und ξ, η, ζ die Richtungscosinus der gegebenen Tangente durch den Punkt $P_{(x,y,z)}$ bedeuten. Zwischen diesen Größen existiren die Relationen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad ,$$

$$\zeta = p\xi + q\eta \quad , \quad \text{woraus:}$$
$$(1+p)^2\xi^2 + 2pq\xi\eta + (1+q^2)\eta^2 = 1 \quad ,$$

und ξ, η, ζ können nun in so weit willkürlich gewählt werden, nachdem der Punkt $P(x\,y\,z)$ gegeben, als sie mit diesen Gleichungen verträglich sind.

Bilden wir für einen Punkt die Krümmungsmittelpunkte der Querschnitte sämtlicher Ebenen, die durch eine durch ihn gehende Tangente der Oberfläche zu legen möglich sind, so erhalten wir als Ort dieser Krümmungsmittelpunkte einen Kreis mit dem Durchmesser ϱ_0 (= Krümmungsradius des Normalschnittes); und die zu diesen sämmtlichen Krümmungsmittelpunkten gehörenden Krümmungskreise liegen auf einer Kugel vom Radius ϱ_0 mit dem Krümmungsmittelpunkte des Normalschnittes als Centrum.

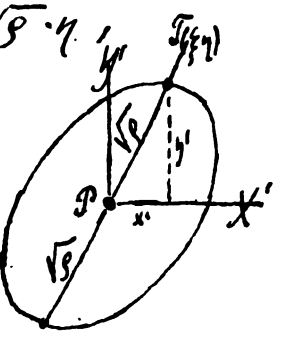


Tragen wir in der Tangentialebene eines Punktes $P(x\,y\,z)$ einer krummen Oberfläche auf jeder Geraden, d. h. Tangente durch ihn von diesem Punkte nach beiden Seiten die Quadratwurzel aus dem Krümmungsradius des Normalschnittes ab, so bilden die Endpunkte dieser Abschnitte

einen Kegelschnitt, dessen Gleichung für ein nach dem Punkte P transformirtes Coordinatensystem, zu dessen x'y'-ebene die Tangentialebene des Punktes P gemacht wird (z'-Axe ist also die Normale der Fläche im Punkte P), lautet:

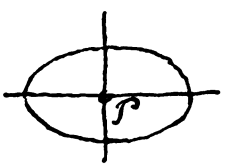
$$r x'^2 + 2s x'y' + t y'^2 = 1 \quad , \text{ wo}$$

$$x' = \sqrt{\varrho}\cdot\xi \quad \& \quad y' = \sqrt{\varrho}\cdot\eta \, ,$$



wo ξ und η die frühere Bedeutung haben, d.h. die Richtungscosinusse der betroffenen Tangente (Radius vektor des Kegelschnittes) mit den Axen x'y'. Der Kegelschnitt ist eine <u>Ellipse</u>, wenn

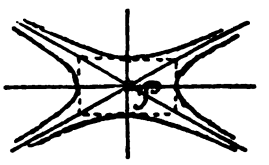
$$rt - s^2 > 0 \, ,$$



d.h. wenn der Punkt ein <u>elliptischer</u> ist. In die Richtung der Axen der Ellipse fallen dann die Normalschnitte des <u>grössten</u> und <u>kleinsten</u> Krümmungsradius, welche beide Richtungen also aufeinander senkrecht stehen. Diese beiden Richtungen resp. Tangenten heissen <u>Hauptrichtungen</u>. Die Krümmungsradien werden in <u>keinem</u> Normalschnitt unendlich gross.

Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, resp. er besteht aus zwei conjugirten Hyperbeln, wenn:

$$rt - s^2 < 0,$$

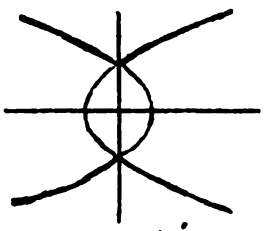


d. h. wenn der Punkt ein hyperbolischer ist. Es gibt zwei Richtungen, in denen der Krümmungsradius unendlich gross ist; diese Richtungen (: die Asymptoten der Hyperbeln :) fallen zusammen mit den Richtungen der Tangenten der Kurve, die von der Tangentialebene aus der Oberfläche herausgeschnitten wird:) im Doppel- oder Berührungspunkt P, und sie sind Wendetangenten der durch sie gelegten Normalschnitte. Die Krümmungsmittelpunkte, welche der einen Hyperbel entsprechen, sind oberhalb der Tangentialebene, die der andern Hyperbel entsprechenden sind unterhalb derselben gelegen, so dass man z.B. die ersteren als positive, die letztern als negative bezeichnen kann. In die Richtung der Axen der Hyperbeln fallen die Kleinsten der resp. positiven oder negativen Krümmungsradien. Der Übergang von den positiven zu den negativen wird durch die unendlich grossen, den Asymptoten entsprechen-

den, vermittelt.

Ist $rt - s^2 = 0$,

d. h. haben wir einen <u>parabolischen Punkt</u>, so ist der Kegelschnitt eine <u>Parabel</u>, d. h. die durch das Abtragen von ρ entstehende Kurve besteht aus <u>zwei</u> Parabelästen (wie die Figur zeigt). Der Krümmungsradius wächst von einem bestimmten Minimum bis ins Unendliche, welche beide Richtungen senkrecht aufeinander stehen. Die Richtung des unendlich großen Krümmungsradius fällt in die Richtung der Tangente des Berührungspunktes, welcher ein stationärer Punkt der von Tangentialebene aus der Oberfläche herausgeschnittenen Kurve ist.



Die parabolischen Punkte auf einer Oberfläche bilden eine Kurve, welche das Gebiet der hyperbolischen von dem der elliptischen Punkte scheidet und <u>Wendekurve</u> genannt wird; sie wird erhalten als die Durchdringungskurve der gegebenen Oberfläche mit einem der z-Axe parallelen Cylinder von der Gleichung:

$$rt - s^2 = 0$$

Machen wir die Hauptaxen des Kegelschnitts zur Axe, so lautet seine Gleichung in Polarcoordinaten:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\xi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\xi}{\rho_2} \quad ,$$

wo ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien, d. h. die Krümmungsradien der Hauptschnitte sind. Mit dieser Formel – Formel von Euler – kann man wenn die Hauptkrümmungsradien bekannt sind, den Krümmungsradius des Normalschnittes irgend einer Tangente des nämlichen Punktes, die mit der x'-Axe den Winkel ξ einschließt, berechnen.

Sind ρ' und ρ'' die Krümmungsradien irgend zweier aufeinander senkrechter Tangenten eines Punktes, so gilt die Gleichung:

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

d. h. die Summe der Krümmungen zweier auf einander senkrechter Normalschnitte durch einen Punkt einer krummen Oberfläche ist constant, und zwar gleich der Summe der beiden Hauptkrümmungen des betreffenden Punktes; daher nennt man den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right\}$$

die mittlere Krümmung.

Die beiden Hauptkrümmungen werden berechnet als die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{\varrho^2}+\left\{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\right\}\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\varrho}+(rt-s^2)=0$$

so dass also

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{1}{\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \quad ;$$

und die Cosinusse ξ, η, ζ der Winkel, welche die diesen Hauptschnitten entsprechenden Tangenten mit den Coordinatenaxen bilden, finden wir aus den Gleichungen:

$$\left\{(1+p^2)\lambda+r\right\}\xi+(pq\lambda+s)=0$$

& $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ oder

$$\zeta=p\xi+q\eta$$

wo $\lambda=-\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\varrho}$

Wir können die Hauptkrümmungen auch finden aus den Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = X_1 + Y_2 \\ \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{array} \right\} ,$$

oder was dasselbe ist, als die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{\rho^2} - (X_1 + Y_2)\frac{1}{\rho} - (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0$$

oder

$$\left| \begin{array}{cc} X_1 - \frac{1}{\rho} & X_2 \\ Y_1 & Y_2 - \frac{1}{\rho} \end{array} \right| = 0 ,$$

Gleichungen, deren Wurzeln stets reell sind.

Die Richtungen der Hauptstangenten erhalten wir aus:

$$\xi\left(X_1 - \frac{1}{\rho}\right) + \eta X_2 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\xi Y_1 + \eta\left(Y_2 - \frac{1}{\rho}\right) = 0$$

und den übrigen bekannten Bedingungen für ξ, η, ζ. — Es ist nun:

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial \cos\lambda}{\partial x} = \frac{(1+q^2)r - pqs}{R^3} \quad (1$$

$$X_2 = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial \cos\lambda}{\partial y} = \frac{(1+q^2)s - pqt}{R^3} \quad (2$$

$$Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \cos\mu}{\partial x} = \frac{(1+p^2)s - pqr}{R^3} \quad (3$$

$$Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \cos\mu}{\partial y} = \frac{(1+p^2)t - pqs}{R^3} \quad (4$$

wo

$$X = \frac{p}{R} = \cos\alpha\,; \quad Y = \frac{q}{R} = \cos\mu$$

$$Z = \frac{1}{R} = \cos\nu$$

die Richtungscosinus der Normalen in $P_{(xyz)}$ gegen die Coordinatenaxen sind. Es bedeutet:

$$R = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

Wenn die Determinante der obigen Gleichungen verschwindet, so werden die beiden Wurzeln einander gleich, und wir nennen einen solchen elliptischen Punkt, bei dem dies eintritt, einen Kreispunkt; sind zwar die Wurzeln gleich aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen, was der Fall ist, wenn

$$X_1 + Y_2 = 0$$

so nennen wir diesen Fall eines hyperbolischen Punktes: gleichartig hyperbolisch. Die Bedingung für einen Kreispunkt ist

$$X_2 = Y_1 = 0$$ woraus

folgt: $$Y_2 = X_1$$ oder

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

Die Kugel ist eine Fläche deren sämmtliche Punkte Kreispunkte sind.

Die Krümmungsradien aller Normalschnitte eines Kreispunktes sind einander gleich. Die Kreispunkte einer Oberfläche

sind die einzigen Punkte, in denen sich eine Kugel der Oberfläche anschmiegen kann, analog des Krümmungskreises bei ebenen Kurven.

Ist uns die Gleichung der Oberfläche in der Form gegeben

$$F(x,y,z) = u = 0 \quad ,$$

so ist der Krümmungsradius eines Normalschnittes im Punkte (x,y,z)

$$\rho = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}{u_{11}\xi^2 + u_{22}\eta^2 + u_{33}\zeta^2 + 2u_{12}\xi\eta + 2u_{23}\eta\zeta + 2u_{13}\xi\zeta} \quad ,$$

wobei noch die Beziehungen bestehen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$
$$u_1\xi + u_2\eta + u_3\zeta = 0 \quad .$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien bestimmen sich als die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u_{11}-\lambda & u_{12} & u_{13} & u_1 \\ u_{21} & u_{22}-\lambda & u_{23} & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33}-\lambda & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

wo

$$\lambda = \frac{R}{\rho}$$

oder aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} X_1 - \frac{1}{\rho} & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 - \frac{1}{\rho} & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 - \frac{1}{\rho} \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche nur scheinbar vom dritten Grade ist, da das constante Glied verschwindet, so dass mit $\frac{1}{\rho}$ dividirt werden kann; es ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Es bedeuten nun

$$X = \frac{u_1}{R} \; ; \qquad Y = \frac{u_2}{R} \; ; \qquad Z = \frac{u_3}{R} \; ;$$

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial x} \; ; \qquad Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} \; ; \qquad Z_1 = \frac{\partial Z}{\partial x} \; ;$$

$$X_2 = \frac{\partial X}{\partial y} \; ; \qquad Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial y} \; ; \qquad Z_2 = \frac{\partial Z}{\partial y} \; ;$$

$$X_3 = \frac{\partial X}{\partial z} \; ; \qquad Y_3 = \frac{\partial Y}{\partial z} \; ; \qquad Z_3 = \frac{\partial Z}{\partial z} \; ;$$

$$R = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Sind $\frac{1}{\rho_1}$ und $\frac{1}{\rho_2}$ die Hauptkrümmungen so folgt aus den obigen Gleichungen:

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = X_1 + Y_2 + Z_3 \qquad \&$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho_2} = (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + (X_1 Z_3 - X_3 Z_1) + (Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2),$$

und für die Richtungscosinus ξ, η, ζ &

$\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$ der Hauptstangenden mit den Coordinatenaxen haben wir:

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 =$$

$$\left(X_2 Y_3 - X_3 Y_2 - \frac{1}{\rho_1} X_3\right) : \left(X_3 Y_1 - X_1 Y_3 - \frac{1}{\rho_1} Y_3\right) : \left(X_1 Z_3 - X_3 Z_1 + Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2 + \frac{1}{\rho_1} Z_3\right)$$

$$\xi_2 : \eta_2 : \zeta_2 =$$

$$\left(X_2 Y_3 - X_3 Y_2 - \frac{1}{\rho_2} X_3\right) : \left(X_3 Y_1 - X_1 Y_3 - \frac{1}{\rho_2} Y_3\right) : \left(X_1 Z_3 - X_3 Z_1 + Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2 + \frac{1}{\rho_2} Z_3\right)$$

&

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0$$

Die Bedingungen für den Kreispunkt sind.

$$X_2 Z - X_3 Y = 0$$
$$Y_3 X - Y_1 Z = 0$$
$$Z_1 Y - Z_2 X = 0 \quad .$$

Jede dieser drei Gleichungen ist Folge der beiden andern.

Wir betrachten die Krümmung noch von einem andern Standpunkte aus:

Ziehen wir zu jeder Normalen einer Fläche die Parallele durch den Anfangspunkt, so schneiden diese Parallelen die Einheitskugel in Punkten, von denen jeder also einem ganz bestimmten Punkte der Fläche entspricht. Unter der totalen Krümmung eines Flächenpunktes v, verstehen wir

die Größe des entsprechenden Flächenstückes u auf der Einheitskugel, unter der mittleren Krümmung desselben verstehen wir das Verhältniss $\frac{u}{v}$ dieses Flächenstückes auf der Einheitskugel zum entsprechenden auf der krummen Oberfläche. Gehen wir zu den Grenzen über, d.h. lassen wir das gegebene Flächenstück und folglich auch das correspondirende auf der Einheitskugel unendlich klein werden, so geht das genannte Verhältniss über in die wirkliche Krümmung oder das Krümmungsmaass: $\frac{du}{dv}$.

Es ist nun:

$$\frac{du}{dv} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = K,$$

d.h. die wirkliche Krümmung oder das Krümmungsmaass ist gleich dem Produkte der Krümmungen der beiden Hauptschnitte durch jenen Punkt.

Aus obiger Gleichung folgt:

$$du = \frac{dv}{\varrho_1 \varrho_2}$$

also ist die totale ($\varrho_1 \varrho_2$ Krümmung):

$$u = \iint \frac{dv}{\varrho_1 \varrho_2},$$

während

$$v = \iint dv,$$

so dass die mittlere Krümmung:

$$\frac{u}{v} = \frac{\iint \frac{dv}{\varrho_1 \varrho_2}}{\iint dv} = m, \quad \text{wo}$$

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

und

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien seien also als die Wurzeln der folgenden Gleichung auf (: Satz von Gauß :)

$$\frac{1}{\rho^2} - 2m\frac{1}{\rho} + K = 0$$

Satz: Wie man auch immer eine vollkommen elastische von man dehnbarem Material gefertigte Oberfläche deformire, das Krümmungsmaß in jedem Punkte bleibt dasselbe.

Krümmungslinien einer Oberfläche.

Die Normalen einer Oberfläche sind im allgemeinen windschief unter einander. In denen kann man von jedem Punkte auf zwei von einander verschiedenen Richtungen vorwärts und rückwärts zu benachbarten Punkten gelangen, deren Normalen diejenige des Ausgangspunktes schneiden, also mit ihr in einer und derselben Ebene liegen. Die Aufeinanderfolge der unendlich nahen Punkte, deren Normalen sich schneiden, bildet eine räumliche Kurve auf der Oberfläche, welche Krümmungslinie genannt wird. (: Die Krümmungslinie ist also die Durch

dringungskurve der gegebenen Oberfläche mit der developpablen Fläche der aufeinander-folgenden sich schneidenden Normalen;) und die Gesammtheit derselben bildet ein System von zweifach unendlich vielen Raumkurven, welche alle der Differenzial-gleichung genügen:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dy\,dx & dx^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0 \qquad (1$$

in Verbindung mit der Gleichung der Oberfläche:

$$\underline{z = f(x,y)} \qquad (2,$$

Die Gleichung (1 ist die Differenzialgleichung des Systems der zweifach unendlich vielen durch die räumlichen Krümmungslinien gehenden der Z-Axe parallelen Cylinder — denn die Gleichung enthält kein z — und die Krümmungslinien ergeben sich als die Durchdringungs-Kurven der Oberfläche mit den Cylindern.

Lautet die Gleichung der Oberfläche

$$F(x,y,z) = u = 0 \qquad (1$$

so lautet die Differenzialgleichung der Krümmungslinien, resp. der Flächen, als deren Durchdringung mit der Oberfläche sie sich ergeben:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ du_1 & du_2 & du_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2$$

wo $du_1 = u_{11}\,dx + u_{12}\,dy + u_{13}\,dz$ (1)

$du_2 = u_{21}\,dx + u_{22}\,dy + u_{23}\,dz$ (2)

$du_3 = u_{31}\,dx + u_{32}\,dy + u_{33}\,dz$ (3)

Durch Elimination von z und dz aus der Diff-gleichung mit Hülfe von

$$u = 0 \qquad \text{und}$$

$$du = u_1\,dx + u_2\,dy + u_3\,dz = 0$$

erhalten wir wieder die Diff.-gleichung jener Cylinder.

In jedem Punkte schneiden sich lt. früherem zwei Krümmungslinien und die Richtungen ihrer Tangenten fallen zusammen mit den Haupttangenten des Punktes, d. h. mit den Richtungen der Normalschnitte der Hauptkrümmungen; sie stehen also aufeinander senkrecht. Die ganze Oberfläche wird also durch die Krümmungslinien in lauter unendlich kleine Rechtecke zerlegt. Alle Tangenten der Krümmungslinien sind also Haupttangenten der Oberfläche. Die Kreispunkte treten als singuläre Punkte auf, die Hauptangenten sind unbestimmt. Man kann von einem Kreispunkt nach jeder Richtung zu einem unendlich benachbarten Punkte gelangen, dessen Normale die des Kreispunktes schneidet – doch gehen deshalb die Krümmungslinien nicht alle durch den Kreispunkt. (Vergl. Kreispunkte & Krümmungsl. des Ellipsoids!)

Beispiel:

Kreispunkte & Krümmungslinien des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad , \text{ wo}$$

$a > b > c$

Die Differentialgleichung der durch die Krümmungslinien gehenden Cylinder parallel zur z-Axe lautet:

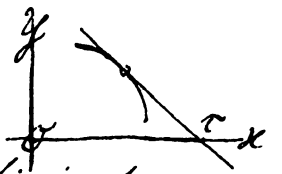
$$A x y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x^2 - A y^2 - B\right) \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

wo $A = \frac{(b^2 - c^2)a^2}{(a^2 - c^2)b^2}$; $B = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}$,

eine Gleichung, welche in Bezug auf

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau$$

quadratisch ist — zum Beweise, dass durch einen Oberflächenpunkt zwei Krümmungslinien gehen. Sind die Coefficienten dieser Gleichung alle gleich Null, so erhalten wir keine bestimmte Werthe für $\operatorname{tg} \tau$; wir erhalten also durch Nullsetzen sämmtlicher Coefficienten der obigen Gleichung die Bedingung für die Kreispunkte des Ellipsoids.



Durch Integration der Differentialgleichung erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad ,$$

welche ein System confocaler Flächen zweiten Grades darstellt, d. h. ein System von Flächen zweiten Grades mit demselben Mittelpunkt und denselben Axenrichtungen, bei denen für die Halbaxen abc und a'b'c' irgend zweier Exemplare F und F' unter ihnen die Beziehung gilt:

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 .$$

Die Durchdringungskurven der gegebenen Fläche mit diesem Systeme sind die Krümmungslinien. Für jedes λ erhalten wir eine andere Fläche, also auch eine andere Krümmungslinie. Für $\lambda = 0$ erhalten wir die Gleichung der gegebenen Fläche; diese gehört also ebenfalls zum System der confocalen Flächen zweiten Grades.

Für alle Werthe von:

λ zw. $+\infty$ u. $-c^2$ erhalten wir Ellipsoide, welche sich natürlicher Weise nirgends durchdringen. Die Schar der Ellipsoide erzeugt also auf dem gegebenen ebenfalls zum System gehörenden keine Krümmungslinien.

Für $\lambda = -c^2$ erhalten wir eine Ellipse in der $xy = ab$, die Focalellipse des Systems, mit den Halbaxen: $\sqrt{a^2 - c^2}$ und $\sqrt{b^2 - c^2}$, also von der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1 \quad ; \text{ d. h.}$$

wir erhalten ein Ellipsoid mit

unendlich kurzer Z-Axe, das doppelt gelegte Stück der XY-ebene innerhalb der Ellipse –

oder:

ein einschaliges Hyperboloid mit unendlich kurzer Z-Axe, das doppelt gelegte Stück der XY-ebene außerhalb der Ellipse.

Für alle Werthe von λ zw. $-c^2$ u. $-b^2$ erhalten wir einschalige Hyperboloide, welche unter sich keine Schnittkurven gemein haben.

Für $\lambda = -b^2$ erhalten wir eine Hyperbel in der XZ-ebene, die Focalhyperbel, von der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} = 1 \quad , \text{ d. h.}$$

ein einschaliges Hyperboloid mit unendlich kurzer Y-Axe, wenn wir in Bezug auf die Hyperbel das äußere doppelt gelegte Stück der XZ-ebene betrachten, –

oder

ein zweischaliges Hyperboloid mit unendlich kurzer Y-Axe, wenn wir das innere doppelt gelegte Stück der XZ-ebene für Bezug auf die Hyperbel betrachten.

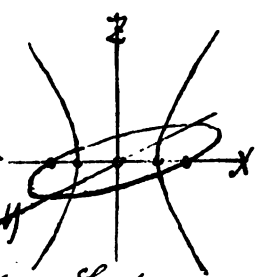
Für alle Werthe von λ zw. $-b^2$ u. $-a^2$ erhalten wir zweischalige Hyper-

boloide, die sich nirgends durch-
dringen.

Für $\lambda = -a^2$ erhalten wir ein zweischaliges Hy-
perboloid, wenn wir die ganze
doppelt zy-ebene als solches be-
trachten. gelegte
Für alle Werthe von

λ zw. $-a^2$ u. $-\infty$ erhalten wir imaginäre Ellipsoide,
welche hier nicht in Betracht fallen.

Das ganze System confokaler Flächen zweiten
Grades löst sich also auf in drei Systeme:
Ellipsoide, ein- und zweischalige Hyperboloide,
und die Exemplare je eines dieser Systeme ha-
ben unter sich keine Schnittkurven mit ein-
ander gemein, wohl aber schneidet
jedes Exemplar eines Systems, alle
Exemplare der beiden andern
Systeme. Die Krümmungslinien
auf dem Ellipsoide sind also die
Ergebnisse der Durchdringung
des gegebenen Ellipsoids mit den Systemen
der einschaligen und zweischaligen Hyper-
boloiden. Durch jeden Punkt des Raumes ge-
hen drei Flächen des Systems, denn wenn wir
in der gegebenen Gleichung des Systems für
x, y, z bestimmte Werthe eingesetzt denken und
dann nach λ auflösen, so erhalten wir eine
Gleichung dritten Grades in λ, deren drei



stets reelle Wurzeln folgendermaßen gelegen sind:

ρ	zwischen	$+\infty$	und	$-c^2$
q	"	$-c^2$	"	$-b^2$
r	"	$-b^2$	"	$-a^2$

Jeder dieser Wurzeln entspricht eine Fläche zweiten Grades:

$$\frac{x^2}{a^2+\rho} - \frac{y^2}{b^2+\rho} - \frac{z^2}{c^2+\rho} = 1 \quad \text{(Ellipsoid)}$$

$$\frac{x^2}{a^2+q} - \frac{y^2}{b^2+q} - \frac{z^2}{c^2+q} = 1 \quad \text{(einsch. Hyp.)}$$

$$\frac{x^2}{a^2+r} - \frac{y^2}{b^2+r} - \frac{z^2}{c^2+r} = 1 \quad \text{(zweisch. Hyp.)}$$

Die drei Flächen haben acht zu den drei Coordinatenebenen symmetrisch gelegene Punkte gemeinschaftlich, deren Coordinaten sind:

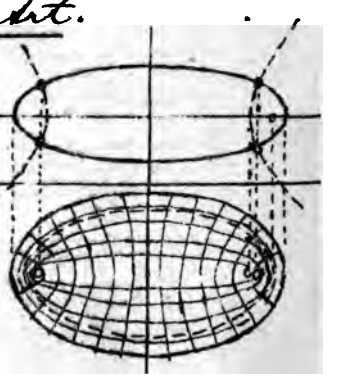
$$x = \pm\sqrt{\frac{(a+\rho)(a+q)(a+r)}{(a-b)(a-c)}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(b+\rho)(b+q)(b+r)}{(b-c)(b-a)}}$$

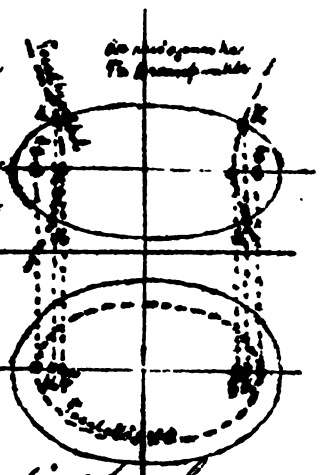
$$z = \pm\sqrt{\frac{(c+\rho)(c+q)(c+r)}{(c-a)(c-b)}}$$

Die drei durch einen Punkt des Raumes gehenden Flächen des confocalen Systems stehen in diesem Punkte senkrecht auf einander, d.h. die drei Tangenten ihrer Durchschnittscurven stehen senkrecht auf einander und die Tangente der Durchdringungscurve zweier Flächen steht senkrecht auf der Tangentialebene der dritten Fläche,

in welcher also die beiden andern Tangenten liegen müssen; die drei Tangentialebenen der drei Flächen in diesem Punkte stehen also ebenfalls senkrecht aufeinander und jede enthält zwei Tangenten der drei Durchdringungskurven. Durch jeden Punkt des gegebenen Ellipsoids geht also ausser ihm noch ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid, und die Tangente ihrer Durchdringungskurve fällt also zusammen mit der Normalen des Ellipsoids, während ihre Tangentialebenen selbst wieder senkrecht aufeinander stehen, so dass also ihre Durchschnittscurven mit dem Ellipsoid, also die Krümmungslinien in diesem Punkte, senkrecht auf einander stehen, was uns eine bereits bekannte Thatsache ist. Die von den einschaligen Hyperboloiden herausgeschnittenen Krümmungslinien, heissen Krümmungslinien erster Art, die von den zweischaligen herausgeschnittenen heissen Krümmungslinien zweiter Art.



Im Grundriss (ξη = ebene) projizieren sich die Krümmungslinien, welche als Durchdringung zweier Flächen zweiten Grades, Kurven vierter Ordnung sind, als ein System confokaler Kegelschnitte



Die Hauptschnitte, d. h. die Kegelschnitte, welche die Hauptebenen des Ellipsoids aus demselben herausschneiden, sind ebenfalls Krümmungslinien desselben.

Die orthogonalen Projektionen der Krümmungslinien nach den drei Coordinatenebenen sind Kegelschnitte oder Stücke von solchen. Die Lage der Ellipsoide ist uns bekannt, da wir annahmen $a > b > c$; die einschaligen Hyperboloide liegen so, dass sie von der Z-Axe nirgens reell getroffen werden, während die zweischaligen so liegen, dass sie von der Y- und der Z-Axe nirgens reell getroffen werden. Die Schnittkurven der Hauptebenen mit dem Systeme der confokalen Flächen zweiten Grades bilden Systeme confokaler Kegelschnitte, und zwar in der XY-Ebene ist das System zur Fokalellipse confokal, die Brennpunkte werden von der Fokalhyperbel herausgeschnitten; die Ellipsen rühren von den Ellipsoiden und den einschaligen Hyperboloiden, die Hyperbeln von den zweischaligen Hyperboloiden. In der YZ-Ebene stammen die Ellipsen von den Ellipsoi-

iden, die Hyperbeln von den einschaligen Hyperboloiden. Die Brennpunkte sind die Schnittpunkte der Fokalellipse mit der yz-Ebene. In der xz-Ebene ist das System der Kegelschnitte confokal zur Fokalhyperbel; die Hyperbeln stammen von den ein- und zweischaligen Hyperboloiden, die Ellipsen von den Ellipsoiden, die Brennpunkte werden von der Fokalellipse herausgeschnitten. Fokalellipse und Fokalhyperbel schneiden sich also gegenseitig die Brennpunkte heraus.

Ganz ebenso wie die einschaligen und zweischaligen Hyperboloide aus den Ellipsoiden die Krümmungslinien herausschneiden, so schneiden die Ellipsoide und die zweischaligen Hyperboloide die Krümmungslinien aus den einschaligen Hyperboloiden und diese und die Ellipsoide schneiden sie aus den zweischaligen Hyperboloiden heraus.

Haben die Gleichung einer Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1 \quad , \text{ wo}$$

$$A - B > 0 \quad \text{u.} \quad B - C > 0 \quad ,$$

so haben wir

ein Ellipsoid, wenn $A = a^2; B = b^2; C = c^2$, wo $a > b > c$;

einschal. Hyp. $A = a^2; B = b^2; C = -c^2$, $a > b$;

zweischal. Hyp. $A = a^2; B = -b^2; C = -c^2$, $b < c$.

Es landen dann die Bedingungen der Kreispunkte:

$$\text{I)} \quad \frac{x^2}{B^2}\left(\frac{1}{B}-k\right)+\frac{z^2}{C^2}\left(\frac{1}{C}-k\right)=0$$

$$\text{II)} \quad \frac{x^2}{C^2}\left(\frac{1}{A}-k\right)+\frac{y^2}{A^2}\left(\frac{1}{C}-k\right)=0$$

$$\text{III)} \quad \frac{y^2}{A^2}\left(\frac{1}{B}-k\right)+\frac{z^2}{B^2}\left(\frac{1}{A}-k\right)=0$$

in Verbindung mit der Gleichung der Fläche zweiten Grades; und es ist hier

$k = \frac{1}{B}$ im Falle des Ellipsoids,
$k = \frac{1}{A}$ . . . einsch. Hyperboloids
$k = \frac{1}{C}$ . . . zweisch. "

Es folgt daraus für die Coordinaten der Kreispunkte des Ellipsoids:

$$y = 0$$

$$x = \pm\sqrt{A\frac{A-B}{A-C}} \qquad \text{u} \qquad z = \pm\sqrt{C\frac{B-C}{A-C}}$$

oder

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad \text{u} \qquad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

und für das zweischalige Hyperboloid

$$z = 0$$

$$x = \pm\sqrt{A\frac{A-C}{A-B}} \qquad \text{u} \qquad y = \pm\sqrt{B\frac{C-B}{A-B}}$$

oder

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}} \qquad \text{u} \qquad y = \pm b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}$$

Das einschalige Hyperboloid hat keine reelle Kreispunkte.

Als Gleichung des Ortes der Kreispunkte der Flächen eines confokalen Systems zweiten Grades erhalte wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

d.h. die Fokalhyperbel und die Fokalellipse. Wir haben also den Satz: Die Fokalhyperbel schneidet aus jedem Ellipsoid des Systems die Kreispunkte heraus, ebenso schneidet die Fokalellipse die Kreispunkte aus jedem zweischaligen Hyp. des Systems. Wird die Fokalellipse als unendlich dünnes Hyp. aufgefasst, so sind die von der Fokalhyp. herausgeschnittenen Brennpunkte derselben als Kreispunkte des Ellipsoids aufzufassen; ebenso, wird die Fokalhyp. als unendlich dünnes zweischaliges Hyperboloid aufgefasst, so sind ihre von der Fokalellipse herausgeschnittenen Brennpunkte derselben als seine Kreispunkte aufzufassen.

Satz: Alle Ebenen parallel den Tangentialebenen der Kreispunkte einer Fläche zweiten Grades schneiden die selbe in einem Kreise.

Die Krümmungslinien haben noch folgende Eigenschaft:

Die Summe der geodätischen Distanzen jedes Punktes einer Krümmungslinie erster Art von den Kreispunkten ist constant, während für die Punkte einer Krümmungslinie der zweiten Art die Differenz constant ist.

Inhaltsverzeichniss.

Differential- und Integralrechnung.

I. Theil.

Differentialrechnung.

	S.
Einleitung: Von d. Gleichungen & Funktionen.	
Gl. ersten, zweiten & dritten Grades	3
Sätze & Formeln über Funktionen	4
Partialbruchzerlegung	8
Interpolationsformel v. La Grange	9
Ableitung rat. Funkt.	10
Mac Laurin's, Taylor's Binomialreihe	11
Unendliche Reihen	12
Transcendente Funktionen:	
1) Exponentialfunktion	15
2) Cyclometrische Funktionen	16
Ableitung der Funktionen	
Allgemeine Formeln	18
Ableitung der transcendenten Funktn.	19
" " Funktion von einer Funkt.	19
" höherer Ordnung	20
Lehrsatz von Taylor	
Mittelwerthsatz d. Differenzrechnung	21
Restformeln der Taylor'schen & Mac Laurin'schen Reihe	22
Potenz-, cosinus-, sinus-, logarithmische & binomische Reihe & Restformeln	23
arctg, arcsin & $lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	24

Regula falsi 24
Newton'sche Formel 25
Über scheinbar unbestimmte Funkt.-werthe 25
Differentiation von Funkt. mehrer Variabler.
Partielle Ableitung 27
Totale Differentiation. 28
Anhang: Complexe Grössen. 30

I. Theil.

Integralrechnung.

Unmittelbare Integration 37
Methode der Zerlegung 38
Partielle Integration 38
Methode der Substitution 38
Integration rat. Funktionen 39
" einiger irrat. " 43
" " transc. " 48
Recursionsformeln des Integ. $\int \sin^n x dx$ etc. 49

II. Theil.

Bestimmte Integrale.

Allgemeine Theorie 53
Simpson'sche Regel 55
Sätze über best. Integrale. 56
Mittelwerthsatz der Integ.-rechnung. 57
Integrationsmethoden Unmittelbare,
Zerlegung, partielle, Substitution 58

Analytische Anwendung der Lehre von den bestimmten Integralen.

Reihenentwicklung f. Restformeln 60
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\sin\varphi)^n d\varphi$ 64
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}$ 64
Arithmetisch-geometrisches Mittel 65
Fourier'sche Reihen 68
$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, $\int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$ 72

II. Theil

Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die Geometrie.

Formeln aus der anal. Geom. d. Ebene 73
Tangenten und Normalen der Kurven
Tangenten. 81
Beispiele: Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel, Cycloide. 83
Normalen 84
Beispiele: Cycloide 85
Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale 86
Beispiele: Parabel, Hyperbel 86
Dasselbe für Polar-Coordinaten 87
Beispiele: Spiralen 88
Krümmung der Kurven.
Allgemeines: Krümmungsradius und -mittelpunkt 89
Berührung und Anschmiegung der Kurven 91

Schmiegungskreis eines Kurvenpunktes 93
Evolute und Evolvente. 95
Beispiele: Cycloide, Parabel, Ellipse, Hyperbel 97
Rektifikation von Kurven in Polarcoord. 104
Beispiele: logarithmische Spirale u.c Kurven von der Gleichung $r^m = a\cos(m\varphi)$ (Hyperbel, Parabel, Cardioide, Lemniskate;) 104
Quadratur ebener Kurven
Für Rechtwinkelkoordinaten 107
Beispiele: Parabel, Kreis, Ellipse, Hyperbel 108
Für Polarcoordinaten 111
Beispiele: Kreis, Kartesisches Blatt, Lemniskate, Ellipse (Keplersche Gesetze;) 111
Rektifikation ebener Kurven 114
Beispiele: Kreis, Parabel, Ellipse, Kettenlinie, Cycloide, Kardioide, Lemniskate, Spirale 115
Rektifikation von Raumkurven 117
Kubatur von Rotationskörpern 118
Beispiele: Kegelstumpf, Kugelzone, Paraboloid, Ellipsoid, Cycloidenbogen, Kreisring 119
Complanation von Rotationskörpern 119
Beispiele: Kegelstumpf, Kugelzone, Kreisring, Paraboloid, Ellipsoid, Cycloidenbogen 119

Guldinsche Regel 121
Lehre von den mehrfachen Integralen 122
Beispiele 123
Volumenbestimmung allgemeiner Körper 124
Beispiele 128
Quadratur allgemeiner Oberflächen 130
Beispiele 132
Massenbestimmung geometrisch begrenzter Körper 133
Pendel 135
Beispiele 138

V. Theil

Anwendung der Differentialrechnung:

Lehre von den Maxima & Minima der Funktionen.

Für eine Funktion in der Form $y=f(x)$ 141
Beispiele 143
Für eine Funktion in der Form $f(x,y)=0$ 145
" " " zweier Variablen $f(x,y,z)=0$ 147
Relative Maxima & Minima 148

Anhang

Determinanten Theorie 152
Identitäten (L. Grange'sche Fol.) 157
Auflösung des Systems von n von einander unabhängigen linearen Gleichungen. 158

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

VII. Theil

Einleitung & Eintheilung 161

Differentialgleichungen erster Ordnung

Allgemeines 164

Diff.-gl. erster Ordnung & ersten Grades

Separation 165

I. Klasse: homogene Gl. 166

II " lineare Diff.-gl. 168

Multiplikation 170

Diff.-gl. erster Ordnung & beliebigen Grades

Allgemeine, partikuläre & singuläre Integrale 174

Integration der Gleichungen

1) Die Gl. enthält blos p 176

2) " " " " p und x 176

3) " " " " p " y 177

4) " " ist in Bezug auf x und y linear 180

Clairaut'sche Diff.-gl. 181

Integration irgend einer Differenzialgleichung erster Ordnung 183

Differentialgleichungen höherer Ordnung. 181

1) Die Gl. enthält nur $y^{(n)}$ 182

2) " " " " $y^{(n)}$ und x 183

3) " " " " $y^{(n)}$ " $y^{(n-1)}$ 185

4) " " " " $y^{(n)}$ " $y^{(n-2)}$ 186

Beispiele $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2}{a^2}$ 187

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2}{a^2}$ 188

5) Die Diff.-gl. hat die Form:
$f(x, y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots y^{(n)}) = 0$ 188

6) Sie ist auf der Form:
$f(x, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$ 189

7) Diff.-gl., welche in Bezug auf $y, y', \dots y^{(n)}$ homogen sind 189

Lineare Differentialgleichungen.

Allgemeines 190

Reduzirte lineare Diff.-gleichungen

1) Die Coefficienten von y und seinen Ableitungen sind constante Zahlen 192

2) Die Coefficienten von y und seinen Ableitungen sind constante Zahlen multiplizirt mit einer Potenz von x, deren Grad gleich ist der Ordnungs-Zahl der betreffenden Ableitungen von y. 194

Complete lineare Diff.-gleichungen. 195

Geometrische Anwendungen der Lehre von den Differentialgleichungen.

Probleme über Tangente, Normale, Subtangente & Subnormale 200

Isogonale Trajectorien 204
Beispiele: logarithmische Spirale, Traktorie, confokale Kegelschnitte 205
Evolvente & Evolute 208
Anhang: Systeme linearer Diff.-gleichungen, aus welchen mehrere unbekannte Funktionen bestimmt werden sollen.
1. Methode der Elimination 209
2. " der Combination 210
3. " wenn part. Integr. gegeben sind 212

VII. Theil.

Variationsrechnung.

Gegeben ist $F(x,y,y')$ 213
Beispiele 215
Brachistochrone 216
Gegeben ist $F(t,x,y,x',y')$ 217
" " $F(x,y,y',y'')$ 219
Relative Maxima & Minima 220
Beispiele 221

VIII. Theil.

Methode der kleinsten Quadrate 223

Anwendungen der höhern Mathematik,

Raumkurven & Oberflächen.

IX. Theil.

Sätze & Formeln aus der analytischen Geometrie des Raumes. 230

Theorie der Raumkurven.

Allgemeines 240
Bogendifferential & Tangente 240
Normalebene 241
Schmiegungsebene, Binormale 241
Contingenzwinkel 242
Hauptnormale, rektifizirende Ebene 243
Krümmungsaxe, Krümmungskreis, Krümmungscentrum 244
Sphärische Krümmung 245
Schmiegungskugel 246
Schmiegungskegel, rektifizirende Haute 247
Torsion, Torsionswinkel, Torsionskrümmung 248
Ganze Krümmung 249

X. Theil.

Theorie der krummen Oberflächen.

Verschiedene Gleichungsformen einer krummen Oberfläche 250

Oberfläche u. Raumkurve 250
Tangentialebene 251
Schnittkurve der Tangentialebene mit der Oberfläche: elliptische, hyperbolische, parabolische Berührung 252
Gleichung der Normalen einer Fläche 254
Reziproke Flächen 257
Fußpunktflächen (u. negative F.Fl.) 258

Krümmung der Oberflächen.

Krümmung ebener Schnitte von Oberflächen, deren Gl. die Form $z = f(x,y)$ hat 298
Satz von Meusnier 259
Krümmungsmittelpunkte der Schnittkurven sämtlicher Ebenen durch eine Tangente 260
Krümmungskegelschnitt 261
Elliptischer Punkt der Oberfläche 261
Hyperbolischer " " " 262
Parabolischer " " " 263
Wendekurve 263
Haupt-Krümmungsradien, Hauptschnitte, Formel von Euler 264
Mittlere Krümmung 264 u. 265
Gleichungen, aus denen die Haupt-Krümmungen berechnet werden 265/266
Kreispunkte 267

Krümmung von Oberflächen, deren Gleichung auf der Form $f(x,y,z)=0$ 268
Krümmungsradius des Normalschnittes. 268
Hauptkrümmungsradien & Gleichungen, aus denen sie sich berechnen 268
Kreispunkte 270
Totale Krümmung 270
Mittlere " 271
Wirkliche " od. Krümmungsmass 271
Satz von Gauss 272
Krümmungslinien einer Oberfläche 272
Hauptangenten 274
Beispiel: Krümmungslinien & Kreispunkte der Fläche II. Grades, speziell des Ellipsoids. 275
System confokaler Flächen II Grades 276
Fokalellipse und Fokalhyperbel 278
Krümmungslinien 1. & 2. Art 280
Hauptschnitte des Systems d. Fl. II. Grs 281
Projektionen der Krümmungslinien 281
Brennpunkte der Hauptschnitte & Kreispunkte 281 & 282
Coordinaten der Kreispunkte 283
Ort der Kreispunkte im System der Flächen zweiten Grades 284.
Kreisschnitte einer Fläche II. Grs. 284

Inhaltsverzeichniss 288
Fehlerverzeichniss 296

Fehlerverzeichniss.

(: Dasselbe macht keineswegs auf Vollständigkeit Anspruch da es nur die vom Verfasser zufällig entdeckten enthält. Ein Anschlag am schwarzen Brett, worin derselbe die H.H. Abonnenten um Angabe der von ihnen gefundenen Unrichtigkeiten ersuchte, blieb erfolglos. Erbittet also der Verfasser hiemit um Nachsicht, falls noch Fehler vorkommen, die hier nicht angegeben sind. Egli :)

Seite 5 in (9) lies das letzte Glied der Reihe:
y^{n-1}, statt: y^{n-2}

17 in der vierten Zeile von unten lies:
$\sin(\arcsin(x)) = x$, statt: $\sin(\arcsin(x)) = \sin(x)$

25 lies den Titl.: „Über scheinbar unbestimmte Funktionswerthe", statt: „Über sch. unb. Funktionen".

68, 69 etc lies: Fourier, statt: Fourier.

73 im Titl. lies: IV. Theil, statt: III. Theil.

187 in der untersten Zeile lies:
$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y^2}{a^2}$ statt: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}$

208 deute das Wort: „Zeichenconstruction" als Combination der Vorzeichen der ausgezogenen Quadratwurzeln!"

280 streiche den ganzen letzten Abstatz der Seite sammt Zeichnung gänzlich, siehe folg. S.!

(Ende.)